Analysis B im WS 2004/05
Zusammenfassung der Übungen

von: Jan Hinzmann
Übung: Dipl.-Math. C. Erdenberger
Vorlesung: Prof. Dr. K. Hulek

Erstellt am:

8. Februar 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Übung – Blockbild, Offene Mengen

1.1 Blockbild

1.2 Offene Mengen

2 Übung – Grenzwerte und Stetigkeit

2.1 Grenzwerte

2.2 Stetigkeit

Definition 1 *(Stetigkeit)*
Eine Abblidung $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ heißt im Punkt $a \in U$ stetig gdw.

$$\lim_{x \to a} = f(a).$$

stetig: "Der Grenzwert existiert und ist der Funktionswert."

Unterscheide: $\mathrm{A} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}$, $\mathrm{B} = \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))$ und $\mathrm{C} = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$:

1. A, B, C sind im Allgemeinen verschieden!

2. Falls A existiert, so auch B und C und es gilt A = B = C $A\ ex. \Rightarrow B = C$

Typische Frage: Ist $f(x,y)$ in $\vec{0}$ stetig / stetig fortsetzbar?
Vorgehen: berechne $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y))$ und $\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$ sind diese ungleich, ist $f(x,y)$ unstetig in $\vec{0}$. Sind sie gleich gilt noch zu prüfen, ob der allgemeine Limes existiert und gilt:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) \ .$$

3 Übung – Differenzierbarkeit (part. Ableitungen, Jacobimatrix)

3.1 partielle Ableitungen

Sei $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in U$ und $x_i \mapsto f(a_1,\ ...,\ a_{i-1},\ x_i,\ a_{i+1},\ ...,\ a_n)$

Dann bezeichnet $\frac{\delta f}{\delta x_i}(a)$ die partielle Ableitung von f nach x_i in a.
Entsprechend für $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: $\frac{\delta f_n}{\delta x_i}(a)$

3.2 Jacobimatrix

Die Jakobimatrix $\mathcal{J}_{f(a)}$ oder $\mathcal{D}_{f(A)}$ ist die folgende Matrix:

$$\mathcal{J}_{f(a)} := \begin{pmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1}(a) & \dots & \frac{\delta f_1}{\delta x_n}(a) \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_1}(a) & \dots & \frac{\delta f_m}{\delta x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Ein Spezialfall ist $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dann ist:

$$\mathcal{D}_{f(A)} = \nabla f(a) = grad\, f(a) = \left(\frac{\delta f_1}{\delta x_1}(a) \ \dots \ \frac{\delta f_1}{\delta x_n}(a) \right)$$

3.3 Differenzierbarkeit

Definition 2 *(Differenzierbarkeit) $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diffbar in $a \in U$, gdw. die patiellen Ableitungen von f in a existieren und wenn deren Grenzwerte = null gilt, also*

$$\lim_{x \to a} \frac{||f(x) - f(a) - \mathcal{D}_{f(a)}(x-a)||}{||x-a||} = 0$$

Abbildung 1: Frage: Ist f diffbar?

4 Übung – Richtungsableitung und Ableitungsregeln

Richtungsableitung, Summen-, Produkt- und Quotientenregel.

4.1 Ableitungsregeln

Hier gelten die üblichen Regeln:

Summenregel $(u+v)' = u' + v'$

Produktregel $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Quotientenregel $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Kettenregel $(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ (Äussere "mal" Innere)

4.2 Richtungsableitung

Die Richtungsableitung von f im Punkt a in Richtung von $\vec{v}$. ist folgendermaßen definiert:

Lemma 1 *Gilt $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in U$, $\vec{v} \in \mathbb{R}$, mit $|\vec{v}| = 1$. Dann ergibt*

$$\frac{d}{dt} f(a + t\vec{v}) \mid_{t=0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h\vec{v}) - f(a)}{h}$$

den skalaren Wert der Richtungsableitung.

Oder man berechnet die Richtungsableitung über den **Gradienten**:

Satz 1 *Ist $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffbar, so ex. alle Richtungsableitungen und es gilt:*

$$Df(a)\vec{v} = gradf(a) \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\delta f}{\delta x_i}(a) \cdot \vec{v} \right) .$$

5 Übung – Tangentialebene, Taylorformel

5.1 Richtung und Betrag des größten Anstiegs

Satz 2 *$f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffbar, $a \in U$. Ist $grad\, f(a) \neq 0$, so zeigt $grad\, f(a)$ in die Richtung des größten Anstiegs von f. Die Steigung in dieser Richtung ist dann durch $||grad\, f(a)||$ gegeben.*

5.2 Tangentialebene

Satz 3 *(Tangentialebene)*
Sei $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffbar. Sei $a \in U$ mit $f(a) = c$ und $grad\, f(a) \neq 0$. Dann ist die Tangentialebene in a an die Niveaufläche N_c von f gegeben durch

$$grad\, f(a) \cdot \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ x_n - a_n \end{pmatrix} = 0 \quad (\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{0}).$$

Beispiel: (Tangentialebene)

Sei $g(x) = \frac{1}{2}(y^2 \cos x - xy)$, $a = \binom{\pi}{\pi}$ und die Niveaufläche $N_{-\pi^2}$. Berechne die Gleichung der Tangentialebene.

1. $\mathbf{grad\, f(a) \neq 0}$?:
   $\binom{g_x(x,y) = -\frac{1}{2}y^2 \sin x - \frac{1}{2}y}{g_y(x,y) = y \cos x - \frac{1}{2}x} \} grad\, f(x,y) = (-\frac{1}{2}y^2 \sin x - \frac{1}{2}y,\ y \cos x - \frac{1}{2}x)$

2. $\mathbf{grad\, g}(\pi, \pi) = (-\frac{1}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi) \neq 0$ ✓

3. **Tangentialebene** $\left(-\frac{1}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi\right) \cdot \binom{x-\pi}{y-\pi} = 0$

   $\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\pi(x - \pi) - \frac{3}{2}\pi(y - \pi) = 0$
   $\Leftrightarrow \cdots$
   $\Leftrightarrow x + 3\,y = 4\pi.$

5.3 Taylorformel 2ter Ordnung

Idee: Approximation komplizierter Funktionen (sin, cos, ...) durch Polynome

Satz 4 *(Taylorformel zweiter Ordnung)*
Sei $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, c^2–Funktion und $a \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$f(a+h) = \underbrace{\underbrace{f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\delta f}{\delta \times_i}(a)}_{\text{Taylorformel erster Ordnung}} + \sum_{i,j=1}^{n} h_i\, h_j\, \frac{\delta^2 f}{\delta x_i\, \delta x_j}(a) + \underbrace{R_{2,a}(h)}_{\text{Rest soll möglichst klein sein}}}_{\text{Taylorformel 2ter Ordnung}}$$

mit $\lim \frac{|R_{2,a(h)}|}{||h||^2} = 0.$

Ist die Funktion von der Klasse C^2, so gilt: $f_{xy}(a) = f_{yx}(a)$!
Alles schön und gut, hier aber besser ein Beispiel

Beispiel: (Für n=2)

$$
\begin{aligned}
&f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = \\
&\qquad f(x_0, y_0) \\
&\qquad + h_1 f_x(x_0, y_0) + h_2 f_y(x_0, y_0) \\
&\qquad + \tfrac{1}{2} {h_1}^2 f_{xx}(x_0, y_0) + h_1 h_2 f_{xy}(x_0, y_0) + \tfrac{1}{2} {h_2}^2 f_{yy}(x_0, y_0) \\
&\qquad + R_{2,(x_0,y_0)}(h_1, h_2)
\end{aligned}
$$

Man braucht also f_x, f_y, $\underbrace{f_{xy} \; oder \; f_{yx}}_{Klasse\ C^2}$, f_{xx} und f_{yy}.

6 Übung – Extremwerte

6.1 Minimum- Maximumstelle

$$x_0 \in A \text{ Maximumstelle von f auf } A \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \leq f(x_0), \text{ für alle } x \in A \quad (1)$$
$$x_0 \in A \text{ Minimumstelle von f auf } A \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq f(x_0), \text{ für alle } x \in A \quad (2)$$

Man spricht von einer *lokalen Min-/Maxstelle*, wenn die obigen Kriterien nur in einer Umgebung V von x_0 gelten, sodass x_0 Min-/Maxstelle von f auf V ist.
Frage: Wie finde ich die Kandidaten für lokale Extermwerte?
Ana A: $f'(x) = 0$
Ana B: Betrachte die krtischen Punkte. ($grad\, f(a) = 0$)

6.2 kritischer Punkt

$$x_0 \in U \text{ heißt kritischer Punkt von f, falls } grad\, f(a) = 0$$

6.3 Lokales Extremwertkriterium

$f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffbar. Nimmt f in $x_0 \in U$ ein lokales Extremum an, so ist x_0 kritischer Punkt von f.

Frage: Wie bestimme ich, ob eine Extremstelle vorliegt und wie bestimme ich dann ihren Typ (Minimum/Maximum)?
Ana A: Betrachte 2te Ableitung
Ana B: Extremstellentest für zwei Variablen

6.4 Extremstellentest für zwei Variablen:

Es sei $f(x, y)$ eine auf der offnenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ erklärte Funktion der Klasse C_2.
$\vec{x_0}$ sei kritischer Punkt von f ($grad\, f(\vec{x_0}) = 0$)
Sei

$$\mathcal{D}(x_0, y_0) = (f_{xx}(x_0, y_0)) \cdot (f_{yy}(x_0, y_0)) - (f_{yx}(x_0, y_0))^2$$

Dann gilt:

1. Ist $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ und $\mathcal{D}(x_0, y_0) > 0$, dann ist (x_0, y_0) ein *lokales Minimum.*
2. Ist $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ und $\mathcal{D}(x_0, y_0) > 0$, dann ist (x_0, y_0) ein *lokales Maximum.*
3. Ist $\mathcal{D}(x_0, y_0) < 0$, dann ist (x_0, y_0) ein *Sattelpunkt.*

7 Übung – pos. definite Matrizen, globale Extrema

7.1 pos. definite Matrizen

Definition 3 *Eine symm. nxn Matrix A heißt pos. definit/(neg. definit), falls für alle $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$ gilt: $\vec{v}^t A \vec{v} > 0$ bzw. $(\vec{v}^t A \vec{v} < 0)$*

Bem.: Insbesondere gilt das für

$$\vec{v} = \vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i - te\ Stelle$$

Dann ist $\vec{e}_i^t A \vec{e}_i = a_{ii} > 0$ bzw. $(a_{ii} < 0)$ d.h. alle Diagonalelemente müssen pos. (neg.) sein.Ist dies nicht der Fall, so spricht man von der Indefinitheit der Matrix. So ist zum Beispiel

$$det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \text{positiv definit:}$$

Man berechnet die Determinanten der 1x1, 2x2, ... , nxn Matrizen, sind alle größer null, so ist die Matrix positiv definit.
Da die Determinante der Untermatrix $det\, A_1 = 1 > 0$ ist und
auch die Determinante der Untermatrix $det\, A_2 = 1 \cdot 3 - (-1) \cdot (-2) = 1 > 0$ ist.

7.2 Hurwitzkriterium:

pos. def. Die Matrix A ist pos. def. gdw. $det\, A_k > 0$, k=1,...,n $(A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k})$

neg. def. Die Matrix A ist neg. def. gdw. $det\, (-A_k) > 0$, k=1,...,n $(A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq k})$

7.3 Hessematrix

Die Hessematrix ist die Matrix einer Funktion, mit den zweiten Ableitungen als Elemente:

$$\mathcal{H}_{f(x,y,z)} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Hesse-Matrix H lässt sich der Charakter der kritischen Punkte bestimmen.
Ist $\mathcal{H}$ positiv definit, so ist der Punkt ein lokales Minimum.
Ist $\mathcal{H}$ negativ definit, so ist der Punkt ein lokales Maximum.
Ist $\mathcal{H}$ indefinit, so ist derPunkt ein Sattelpunkt.

8 Implizite Funktionen

Definition 4 *$f : U \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Durch $f(x,y) = 0$ ist auf $I \subset \mathbb{R}$ eine implizite Funktion $g : U \to y$ erklärt, falls es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ genau ein $y \in J$ gibt, mit $(x,y) \in U$ und $f(x,y) = 0$.*

Jede Menge Prosa ist in den Übungsaufzeichnungen nachzulesen...

8.1 Satz über implizite Funktionen

Satz 5 *(Satz über implizite Funktionen)*
Sei $f : U \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion. Ist $(x_0, y_0) \in U$ ein Punkt mit $f(x_0, y_0) = 0$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Dann gibt es offene Intervalle I und J mit $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$, sodass gilt:

1. *$\mathbb{R} = I \times J \subset U$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0 \ \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}$*
2. *Durch $f(x,y) = 0$ ist auf I eindeutig eine differenzierbare implizite Funktion $g \cdot I \to J$ mit Ableitung $g'(x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x,g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,g(x))} \ \ \forall x \in I$ erklärt.*

Also
– Es muss also eine Nullstelle geben
– Die erste Ableitung nach dem letzten Parameter (hier y) muss an dieser Nullstelle $\neq 0$ sein
$\Rightarrow$ Dann gibt es eine implizite Funktion, von der man die Ableitung wie beschrieben angeben kann.

Hat man Funktionen der Form $f(x,y,z)$ gegeben, prüft man die Nullstelle und bildet die partielle Ableitung nach z ($\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$) ist diese $\neq 0$, so gibt man die partiellen Ableitungen $g_x(x,y)$ und $g_y(x,y)$ wie oben an.

9 Übung – Satz über implizite/inverse Funktionen

9.1 Satz über implizite Funktionen

9.1.1 Bisher: Auflösen nach einer Variablen

Die Gleichung $f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ erlaubt es uns (unter gewissen Vorraussetzungen) nach y aufzulösen.

9.1.2 Nun: Auflösen nach m Variablen

Gegeben sei $f : U \in \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$. Dann können wir die (Vektor-) Gleichung $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$ als Gleichungssystem auffassen:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0 \end{aligned}$$

Wir haben nun m Gleichungen und können somit unter gewissen Vorraussetzungen nach m Variablen auflösen.

Beispiel
Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und $m+n$ Variablen. Wir können dann im Allgemeinen m der Variablen eleminieren.

Satz 6 *(Allgemeiner Satz über implizite Funktionen)*
Sei $f : U \in \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ C^1*-Funktion und* $(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0) \in \mathbb{R}^{n+m}$ *mit* $f(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_m^0) = 0$
d.h. Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ f_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) &= 0 \end{aligned}$$

und gilt

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)} (x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots y_m^0) \neq 0$$

so besitzt das durch f *gegebene Gleichungssystem in der Nähe von* $(x_1^0, \ldots, y_m^0)$ *eindeutige Lösungen, die durch diffbare Funktionen*

$$Y := g_i(x_1, \ldots, x_n) : \; f(x_1, \ldots, x_n, g(x_1, \ldots, x_n)) = 0$$

gegeben sind.

Praktisch sieht das dann so aus, dass man für jede Ausgangsgleichung des LGSs die partiellen Ableitungen mit den eingesetzten Ersetzungen bildet. Und als Lösungen der neu entstehenden Gleichungssysteme die Werte der Ableitung der Ersetzung erhält. siehe 9.S1.

9.2 Satz über inverse Funktionen

Satz 7 *Sei* $f : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^1*-Funktion. Es sei* $\left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right) \in U$
und es gelte $\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x_1^0, \ldots, x_n^0) \neq 0$.
Dann gibt es eine Umgegung V *von* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *und* W *von* $f(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *und eine eindeutig diffbare Abbildung* $g : W \to V$*, die die Umkehrabbildung von* $f|_V : V \to W$

ist.
Ferner gilt: $\det g(f(x,y)) = [\det f(x,y)]^{-1}$ *(Ist die Determinante* $\neq 0$*, so ist die Matrix invertierbar und somit die Umkehrfunktion von* f*).*

10 Übung – Extremwerte mit Nebenbedingungen, Rotation

10.1 Extremwerte mit Nebenbedingung

Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$, Nebenbedingung NB $g(x_1, \ldots, x_n) = 0$

1. Lässt sich die NB explizit nach einer Variablen auflösen, (setzt man die Auflösung in f ein und erhält) $\rightsquigarrow$ Extremwertaufgabe in $n-1$ Variablen.

2. Lässt sich g nicht explizit auflösen $\rightsquigarrow$ Multiplikationsregel von Lagrange

10.1.1 Multiplikationsregel von Lagrange

Ein Beispiel: Sei $f(x, y) = x^2 + y^2$ (Paraboloid), die Nebenbedingung NB: $g(x, y) = (x+y)^2 + \frac{(x-y)^2}{4} - 1 = 0$ (Ellipse) Bestimmen Sie mögliche Extremwerte.
Lagrangemultiplikation:

1. Schritt Lagrange Hilfsfunktion $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$
$\rightsquigarrow L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda \left[(x+y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2 - 1\right]$

2. Schritt kritische Punkte von $L(x, y, \lambda)$:

Löse GS:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, y, \lambda) = 2x + \lambda\left[2(x+y) + 1/2(x-y)\right] = 0 \tag{1}$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, \lambda) = 2y + \lambda\left[2(x+y) - 1/2(x-y)\right] = 0 \tag{2}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = g(x, y) = (x+y)^2 + 1/4(x-y)^2 - 1 = 0 \tag{3}$$

<u>(1)+(2):</u>

$$\begin{aligned} &2x + 2y + \lambda(4(x+y)) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x+y)(1+2\lambda) = 0 \\ &\Rightarrow x = -y \vee \lambda = -1/2 \end{aligned}$$

$\underline{x = -y}$:

$$\left.\begin{aligned} &\overset{\text{in (3)}}{\Rightarrow} \; x^2 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm 1 \;\Rightarrow\; y = \mp 1 \\ &\overset{\text{in (1)}}{\Rightarrow} \pm 2 + \lambda(\pm 1) = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \end{aligned}\right\} \underline{\text{Lsg.:}}\, P_{1,2} = (\pm 1, \mp 1, -2)$$

$\underline{\lambda = 1/2}$:

$$\left.\begin{aligned} &\overset{\text{in (1)}}{\Rightarrow} \; 2x - (x+y) - 1/4(x-y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y \\ &\overset{\text{in (3)}}{\Rightarrow} \; 4x^2 = 1 \;\Rightarrow x = \pm 1/2 \end{aligned}\right\} \underline{\text{Lsg.:}}\, P_{3,4}(\pm 1/2,\ \pm 1/2\ , -1/2)$$

3. Schritt $f(P_{1,2}) = 1 + 1 = \underline{2}$ $\qquad f(P_{3,4}) = 1/4 + 1/4 = \underline{1/2}$

Da f auf dem durch $g(x, y) = 0$ gegebenem Weg stetig diffbar ist, muss f auf dem Wegstück zwischen P_1 und P_3 monoton fallen und zwischen P_3 und P_2 monoton wachsen, d.h. P_3 ist lokales Minimum.
Analog: P_4 ist lokales Minimum, und P_1 und P_2 sind lokale Maxima (Alternativ: Betrachte f in der Nähe von P_i auf $g(x, y) = 0$).

10.1.2 Extrema auf abgeschlossenen Mengen:

1. Bestimme lokale Extrema im Inneren der Menge (gewöhnlich über partielle Ableitungen).
2. Bestimme Extrema auf dem Rand $\rightsquigarrow$ Extrema mit NB.
3. Vergleiche Extrema aus 1. und 2.

10.2 Rotation

Definition 5 *Sei* $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *ein Vektorfeld im* $\mathbb{R}^3$*. Die Rotation von* $\vec{v}$ *ist das Vektorfeld*

$$rot\,\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Ist $\vec{v}$ *weiterhin ein Gradientenfeld, so ist* $rot\,\vec{v} = \vec{0}$

11 Übung – Kurvenintegrale, Flächenintegrale

11.1 Kurvenintegrale

Gegeben sei der Weg $\sigma : [0, 2\pi] \;\rightarrow\; \mathbb{R}^3,\; t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ "Schaubenlinie"

Definition 6 *Die Funktion $\vec{v}{\cdot}U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heisst Vectorfeld und sei $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig diffbarer Weg, dann ist das **Kurvenintegral** definiert als:*

$$\int\limits_{\sigma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int\limits_{a}^{b} \vec{v}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt$$

Beispiel:

Definition 7 *$\vec{v} : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißt Gradientenfeld, falls es eine stetig diffbare Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $\vec{v} = \nabla f$.*

Satz 8 *Dann gilt*

$$\int\limits_{\sigma} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\sigma} \nabla f \cdot d\vec{s} = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$$

Endpunkt – Anfangspunkt

Beispiel: Ist $\vec{v}$ ein Gradientenfeld?

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x^2 + 5y + 3yz \\ 5x + 3xz - 2 \\ 3xy - 4z \end{pmatrix}$$

Nun raten wir die Funktion $f(x, y, z)$, deren partielle Ableitungen gerade den Gradienten $\vec{v}$ ergeben:

$$f(x, y, z) = \underbrace{\frac{1}{3}x^3 + 5xy + 3xyz}_{\text{erste Komponente}} \; \underbrace{-2y}_{\text{2te Komp.}} \; \underbrace{-z^2}_{\text{3te Komp.}}$$

Dann gilt $\nabla f = \vec{v}$ ✓$(= grad\, f)$

Satz 9 *Ist $\vec{v}$ Gradientenfeld $\Leftrightarrow$ $rot\,\vec{v} \;=\; \vec{0}$*

11.2 Flächenintegrale

Definition 8 *Unter der Parameterdarstellung eines regulären Flächenstücks versteht man eine Abbildung*

$$\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3;\; \Phi(u,\, v) = \begin{pmatrix} x(u,\, v) \\ y(u,\, v) \\ z(u,\, v) \end{pmatrix}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Φ ist von der Klasse C^1 $\rightarrow$ stetig diffbar*
2. *Φ ist injektiv auf D^0*
3. *Die Tangentialvektoren in allen Punkten $(u,\, v) \in D$ sind linear unabhängig.* $\Rightarrow (\vec{T}_u(u,\, v) \times (\vec{T}_v(u,\, v) \neq 0 \quad \forall\, (u,\, v) \in D$

Drehflächen

$\sigma : [a,\, b] \to \mathbb{R}^3,\ u \mapsto \begin{pmatrix} x(u) \\ 0 \\ z(u) \end{pmatrix}$ (Kurve in xz-Ebene) $\rightsquigarrow$ Rotation um z-Achse ergibt das Flächenstück

In Parameterdarstellung:

$$\Phi(u,\, v) = \begin{pmatrix} x(u)\ \cos\, v \\ y(u)\ \sin\, v \\ z(u) \end{pmatrix} \begin{matrix} mit\ a \le\ u\ \le\ b, \\ 0\ \le\ v\ \le\ 2\pi \end{matrix}$$

Beispiel:

$$\Phi(u,\, v) = \begin{pmatrix} u\ \cos\, v \\ u\ \sin\, v \\ u^2 + 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} mit\ 1 \le\ u\ \le\ 2, \\ 0\ \le\ v\ \le\ 2\pi \end{matrix}$$

Tangeltialvektoren ergeben sich zu:

$$\vec{T}_u(u,\, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} u \\ \frac{\partial f}{\partial y} u \\ \frac{\partial f}{\partial z} u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v \\ sinv \\ 2u \end{pmatrix} \text{ und } \vec{T}_v(u,\, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} v \\ \frac{\partial f}{\partial y} v \\ \frac{\partial f}{\partial z} v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos v \\ sinv \\ 2u \end{pmatrix}$$

und die Tangentialebene zu:

$$\begin{aligned} E(u,\, v) = \vec{v}(\lambda,\, \mu) &= \Phi(u,\, v)\ +\ \lambda\, \vec{T}_u(u,\, v)\ +\ \mu\, \vec{T}_v(u,\, v) \quad ,\lambda,\, \mu \in \mathbb{R} \\ &= \begin{pmatrix} u\ \cos\, v \\ u\ \sin\, v \\ u^2 + 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \cos\, v \\ \sin\, v \\ 2u \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -u\ \sin\, v \\ u\ \cos\, v \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

12 Übung – Flächenintegrale, Flächeninhalt

12.1 Flächeninhalt

Definition 9 *(Flächenintegral)*
Sei eine Parameterdarstellung eines regulären Flächenstücks S(=Surface) im $\mathbb{R}^3$, $f : S \to \mathbb{R}$ stetig und $\vec{v}$ ein Vektorfeld auf S. Dann gilt:

Integral von f über Φ:

$$\int\limits_{\Phi} f\, dS := \int\limits_{D} f\,(\Phi(u,v)) \cdot ||\vec{T}_u \times \vec{T}_v||\, du\, dv$$

Insbesondere ist $\int_{\Phi} dS \equiv$"Flächeninhalt von S" (Fkt. f = konst. 1)

Integral von $\vec{v}$ über Φ:

$$\int\limits_{\Phi} \vec{v}\, d\vec{S} := \int\limits_{D} \vec{v}(\Phi(u,v)) \cdot (\vec{T}_u \times \vec{T}_v)\, du\, dv$$

S1

Sei $\Phi : [1,2] \to \mathbb{R}^3,\ u \mapsto \begin{pmatrix} u \\ 0 \\ 2u \end{pmatrix}$ Drehfläche, $\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ 2u \end{pmatrix},\ 1 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 2\pi$ und $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Was ist $\int\limits_{\Phi} f\, dS$?, Wir bestimmen zunächst $\vec{T}_u$ und $\vec{T}_v$:

$$\vec{T}_u = \begin{pmatrix} cos\, v \\ \sin\, v \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{T}_v = \begin{pmatrix} -u\, sin\, v \\ u \cos\, v \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{T}_u \times \vec{T}_v = \begin{pmatrix} -2u \cos\, v \\ -2u\, sin\, v \\ u \end{pmatrix} \ ,\ ||\vec{T}_u \times \vec{T}_v|| = \sqrt{4u^2(\cos^2 v + \sin^2 v) + u^2} = \sqrt{5u^2} = \sqrt{5}u$$

Jetzt kann's losgehen:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Phi} f\, dS &= \int\limits_{D} [u^2(\cos^2 v + \sin^2 v) + 4u^2] \cdot \sqrt{5}u\ dudv = \int\limits_{D} 5u^3\sqrt{5}\ dudv =_{einsetzen}^{Def.-bereich} \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{1}^{2} 5\sqrt{5}u^3\ dudv \\
&= \int\limits_{1}^{2}\int\limits_{0}^{2\pi} 5\sqrt{5}u^3\ dvdu = 2\pi \int\limits_{1}^{2} 5\sqrt{5}u^3\ du = 2\pi 5\sqrt{5}[\frac{1}{4}u^4]_1^2 = 2\pi 5\sqrt{5}[(\frac{1}{4}2^4) - \frac{1}{4}] \\
&= 10\pi\sqrt{5} \cdot \frac{15}{4} = \frac{150}{4}\sqrt{5}\pi\checkmark
\end{aligned}$$

S2

Gegeben sei derZylinder

$$\Phi(t,\Theta) = \begin{pmatrix} 2 \cos\, \Theta \\ 2 \sin\, \Theta \\ t \end{pmatrix} \quad , \quad 0 \le t \le 2,\ 0 \le \Theta \le 2\pi$$

und das Vektorfeld

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ xyz \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie das Flächenintegral von $\vec{v}$ über Φ.

Es ist: $\vec{T_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{T_\Theta} = \begin{pmatrix} -2\sin\Theta \\ 2\cos\Theta \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{T_t} \times \vec{T_\Theta} = \begin{pmatrix} -2\cos\Theta \\ -2\sin\Theta \\ 0 \end{pmatrix}$. (Diesmal nicht die Norm)

$$\begin{aligned}
\int_\Phi \vec{v} d\vec{S} &= \int_D \vec{v} \cdot (\vec{T_t} \times \vec{T_\Theta})\, dt\, d\Theta \\
&= \int_D (2(\cos\Theta + \sin\Theta),\ 2\sin\Theta + t,\ 4t\cos\Theta\sin\Theta) \cdot \begin{pmatrix} -2\cos\Theta \\ -2\sin\Theta \\ 0 \end{pmatrix} dt\, d\Theta \\
&= \int_D [-4(\cos^2\Theta + \sin\Theta\cos\Theta) - 4\sin^2\Theta - 2t\sin\Theta]\, dt\, d\Theta \\
&= \int_D [-4 - 4\sin\Theta\cos\Theta - 2t\sin\Theta]\, dt\, d\Theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (-4 - 4\sin\Theta\cos\Theta - 2t\sin\Theta)\, dt\, d\Theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\underbrace{\int_0^2 -4 - 4\sin\Theta\cos\Theta\, dt}_{2(-4-4\sin\Theta\cos\Theta)} - \underbrace{\int_0^2 2t\sin\Theta\, dt}_{[t^2\sin\Theta]_0^2 = 4\sin\Theta} \right) d\Theta = \int_0^{2\pi} -8 - 8\sin\Theta\cos\Theta - 4\sin\Theta\, d\Theta \\
&= [-8\Theta - 4\sin^2\Theta + 4\cos\Theta]_0^{2pi} = (-16\pi - 0 + 4) - (0 - 0 - 4) = -16\pi \checkmark
\end{aligned}$$

A Anhang

In der Klausur wird es 5 Aufgaben geben, eine zu Extremwerten (Lagrange, lokal); eine Beweisaufgabe z.B. Folgencharakterisierung

A.1 Allgemeines

p,q-Formel $x^2 + px + q = 0 \iff x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

C^1-Funktion eine Funktion, die stetig diffbar ist, ist von der Klasse C^1.

C^2-Funktion eine Funktion, die 2x stetig diffbar ist, ist von der Klasse C^2.

injektiv Bei $X \to Y$ ist Injektivität gegeben, wenn jedem x_0 genau ein y_0 zugeordnet ist, einige y_0 könne aber auch leer ausgehen. Eine injektive Funktion ist als Relation gesehen links- und rechtseindeutig.

partielle Integration $\int\limits_a^b u'vdx = uv|_a^b - \int\limits_a^b uv'dx$

Skalarprodukt Ist das Skalarprodukt = 0, so stehen die Vektoren senkrecht aufeinander

Kreuzprodukt Sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ l.u., so ist das Kreuzprodukt $\neq 0$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - b_2a_3 \\ b_1a_3 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - b_1a_2 \end{pmatrix}$$

Summenregel $(u + v)' = u' + v'$

Produktregel $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Quotientenregel $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

Kettenregel $(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ (Äussere "mal" Innere)