Zusammenfassung der Übungen
Elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik
A
WS 2004/05

Jan Hinzmann

17. März 2005

Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Übung – Mengen, deMorgan, Siebformel

1.0 Aufgabe

Mengen

Es gilt: $\{...\}^2 = \{...\} \times \{...\}$ z.B.:$\{1,2\} \times \{2,3\} = \{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3)\}$

deMorgan

Es gilt: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ und $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

1.1 Aufgabe – Mengenalgebra

Seien A, B, C drei Ereignisse, geben Sie mengenalgebraische Ausdrücke für die folgendne Aussagen an:

"keins der Ereignisse tritt ein" :

$$A^c \cap B^c \cap C^c = (A \cup B \cup C)^c$$

"genau zwei der Ereignisse treten ein":

$$(A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C)$$

"höchstens zwei der Ereignisse treten ein":

$$(A \cap B \cap C)^c$$

1.2 Aufgabe – Siebformel

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten von $A \cup B \cup C$ im Falle:

$$P(A) = 1/4,\ P(B^c) = 2/3,\ P(C) = 1/2,$$

$$P(A^c \cap B) = 1/4,\ P(B^c \cup C^c) = 5/6,\ P(A \cap C) = 0$$

Siebformel liefert:

$$\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
&\quad \text{NR:} \\
&\quad P(A \cap B) = P(B) - P(A^c \cap B) = \frac{3}{4} = P(B \backslash (A^c \cap B)) \\
&\quad P(B \cap C) = P((B^c \cup C^c)^c) = \frac{1}{6} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - 0 - \frac{1}{6} + 0 \rightarrow (A \cap C) = 0 \\
&= \frac{7}{12} + \frac{6}{12} - \frac{9}{12} - \frac{2}{12} \\
&= \frac{1}{6} \quad .
\end{aligned}$$

Man kann "minus" machen, da $(A^c \cap B)$ Teilmenge von B, also gilt $(A^c \cap B) \subset B$

2 Übung – Laplace Experimente

Urnenmodelle und passende Formeln:

ziehen von k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen	
mit Beachtung derReihenfolge $Perm_k^n$	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!} =$ $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$	unterschiedliche Objekte
ohne Beachtung derReihenfolge Kom_k^n	$\binom{n+k-1}{k}$	$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$	nicht unterscheidbare Objekte
	mit Mehrfachbesetzung	ohne Mehrfachbesetzung	Verteilen von k Objekten auf n Positionen

Tabelle 1: Urnenmodelle – (Kom sind Per, wobei die Elemente geordnet sind)

2.6 Aufgabe – Kombinatorik

2.6.1 MISSISSIPPI

a) Wieviele verschiedene Worte lassen sich durch Umordnen der Buchstaben des Wortes $MISSISSIPPI$ erhalten?
Mississippi hat 11 Buchstaben (1xM, 4xI, 4xS, 2xP) verteilt man o.B.d.A zuerst das 'M', dann die 'P', dann die 'I' und dann die 'S', so erhält man $11 \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4}$ Möglichkeiten.

b) Sei $A :=$ "Es kommt Missippi" für die Anzahl der Möglichkeiten, "Mississippi" zu ziehen ergibt sich: $1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!$, da es:

1 Möglichkeit 'M' zu ziehen,

4 Möglichkeiten 'I' zu ziehen,

4 Möglichkeiten 'S' zu ziehen,

3 Möglichkeiten 'S" zu ziehen,

3 Möglichkeiten 'I' zu ziehen,

2 Möglichkeiten 'S' zu ziehen,

1 Möglichkeiten 'S" zu ziehen,

2 Möglichkeiten 'I' zu ziehen

2 Möglichkeiten 'P' zu ziehen,

1 Möglichkeiten 'P' zu ziehen,

1 Möglichkeiten 'I' zu ziehen

gibt. Insgesamt gibt es 11! Möglichkeiten, 11 Steine aus einem Sack mit 11 Steinen zu ziehen. Somit ergibt sich die W'keit, 'MISSISSIPPI' zu ziehen zu $\frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{1 \cdot 4! \cdot 4! \cdot 2!}{11!} = 2.4 \cdot 10^{-6} = 0.0000024$

2.7 Personen, die in Zug einsteigen

In einen Zug mit 5 Wagons steigen 10 Personen ein. Jede Persone wählt seinen Wagen mit der gleichen W'keit, wie die anderen Personen. Berechnen Sie die W'keit, dafür, dass

a) in jeden Wagen zwei Personen steigen
Es gibt $5 \cdot 5 \cdot ... \cdot 5 = 5^{10}$ Möglichkeiten, 10 Personen auf 5 Wagen zu verteilen.
Weiterhin gibt es $\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}$ Möglichkeiten, dass in jeden Wagen 2 Personen steigen.
Somit ergibt sich die gesuchte W'keit zu: $\frac{\binom{10}{2} \cdot \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2}}{5^{10}}$.

b) ein Wagen bleibt leer, in einen steigen eine, in zwei Wagen zwei und in den letzten fünf Personen ein.
Die Anzahl des W'Raumes hat sich nicht verändert ($\#\Omega = 5^{10}$). Für diese Verteilung der Personen ergeben sich $\binom{10}{0} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{5}$ Möglichkeiten die Personen wie borgegeben zu verteilen. Somit ist die gesucht W'leit: $\frac{\binom{10}{0} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{9}{2} \cdot \binom{7}{2} \cdot \binom{5}{5}}{5^{10}}$.

2.8 Kombinatorische Gedanken (Formeln)

a) $\binom{n}{r}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, r Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln zu ziehen (ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge). Zerlegt man (disjunkt) danach, ob die Kugel mit der Nummer '1' mitgezogen wird oder nicht, ergibt sich

Kugel Nr. '1' dabei: $\binom{n-1}{r-1} \cdot \binom{1}{1}$

Kugel Nr. '1' nicht dabei: $\binom{n-1}{r} \cdot \binom{1}{0}$

Damit gilt also: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$

b) $\binom{n+m}{r}$ ergibt sich, zieht man r Kugeln aus einer Urne mit m schwarzen und n weißen Kugeln (ohne Zurücklegen, ohne Beachtung der Reihenfolge).
Zerlegt man (disjunkt) nach der Anzahl der weißen Kugeln $\binom{n+m}{r} = \binom{n}{0} \cdot \binom{m}{r} + \binom{n}{1} \cdot \binom{m}{r-1} + \binom{n}{2} \cdot \binom{m}{r-2} + ... + \binom{n}{r} \cdot \binom{m}{0} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k} \cdot \binom{m}{r-k}$.

c) Setze $m = n = r$.

3 Übung – Laplace Experimente II

3.11 Fußball EM 2004

Es gibt 16 Mannschaften in 4 Gruppen ({A, B, C, D}).

a) Wenn jede Mannschaft in den Vorrundenspielen genau einmal gegen jede andere Mannschaft spielt, gibt es genau $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$ Spiele, bei n Mannschaften wären es $\frac{n\cdot(n-1)}{2}$ Spiele, da jede Mannschaft gegen jede andere (n), keine Mannschaft gegen sich selbst ($n-1$) spielt und es keine Rückspiele gibt ($x/2$).

b) Die Mannschaften wedern zufällig auf die Gruppen verteilt, wie groß ist die W'keit dass Deutschland mit Holland in einer Gruppe ist?
Verfahren zum lösen solcher Aufgaben:
Zerlege die Menge aller Mannschaften in die Teilmenge {DEU, HOL} und die der übrigen 14 Mannschaften. Das Verteilen ist ein Laplace-Experiment ($P(A_i) = \frac{\#A_i}{\#\Omega}$)
$\#\Omega = \binom{16}{4}\cdot\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}$ und $\#A_i = \underbrace{\binom{16}{2}\cdot\binom{14}{2}}_{\{DEU,HOL\}}\cdot\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}$ woraus folgt:

$\Rightarrow P(A_i) = \frac{\binom{14}{2}}{\binom{16}{4}} = 1/5$

c) Die Hälfte (8) der Mannschaften bekommt Trikots der Marke XXL, wie groß ist die W'keit, dass alle Mannschaften in Gruppe A diese Trikots tragen?
Man zerlegt die Menge der 16 Mannschaften in die Teilmange der 8 "XXL-Mannschaften" und die der übrigen Mannschaften. Das Verteilen der Mannschaften ist dann wieder ein Laplace-Experiment.
Sei T_i das Ereignis: "Alle Mannschaften in Gruppe i tragen XXL-Trikots", $i = 1, ..., 4$

$$P(T_1) = \frac{\binom{8}{4}\cdot\binom{8}{0}\cdot\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}}{\binom{16}{4}\cdot\binom{12}{4}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}} = \frac{\binom{8}{4}}{\binom{16}{4}}$$

Wie groß ist die W'keit, dass es mindestens eine Gruppe gibt, in der alle Mannschaften XXL-Trikots tragen?
Sei U dieses Eregnis, $P(U)$. Hier ist allerdings das Gegenereignis schwer zu berechnen, aber U ist auch: $T_1 \cup T_2 \cup T_3 \cup T_4$ was allerdings nicht disjunkt ist.
Hier hilft die Siebformel und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
P(U) &= P(T_1) + P(T_2) + P(T_3) + P(T_4) \\
&\quad -P(T_1 \cap T_2) - P(T_1 \cap T_3) - P(T_1 \cap T_4) - ... - P(T_3 \cap T_4) \\
&\quad +0 \text{ (Es kann nur maximal 2 XXL-Mannschaften geben.)} \\
&= 4\cdot P(T_1) - \underbrace{\binom{4}{2}\cdot P(T_1 \cap T_2)}_{\text{Diese beispielhaft gewählten Teams sind XXL-Teams.}} \\
&= 4\cdot\frac{\binom{8}{4}}{\binom{16}{4}} - \binom{4}{2}\cdot\frac{\overbrace{\binom{8}{4}\binom{4}{4}}^{XXL}\binom{8}{4}\binom{4}{4}}{\binom{16}{4}\binom{12}{4}\binom{8}{4}\binom{4}{4}} \\
&= 4\cdot\frac{\binom{8}{4}}{\binom{16}{4}} - \binom{4}{2}\cdot\frac{\binom{8}{4}\binom{4}{4}}{\binom{16}{4}\binom{12}{4}} \\
&= \frac{329}{2145} = 1/7.
\end{aligned}$$

3.12 Skatbeispiel

Sei $A_{i,j}$ das Ergeignis, dass Spieler 1 genau i Buben erhält und j Buben im Skat liegen. Die W'keit ist in den meisten Fällen 0, ausser in denen, wo gilt: $i + j \leq 4$ und $j \leq 2$. Zerlegt man wieder die Mengen in die Teilmenge der vier Buben und der 28 anderen Karten, dann ergibt sich für die gesuchte W'keit

$$
\begin{aligned}
P(A_{i,j}) &= \frac{\overbrace{\binom{4}{j} \cdot \binom{28}{2-j}}^{\text{Skat}} \cdot \overbrace{\binom{4-j}{i} \cdot \binom{28-(2-j)}{10-i}}^{\text{Spieler 1}} \cdot \binom{20}{10} \cdot \binom{10}{10}}{\binom{32}{2} \cdot \binom{30}{10} \cdot \binom{20}{10} \cdot \binom{10}{10}} \\
&= \frac{\binom{4}{j} \cdot \binom{28}{2-j} \cdot \binom{4-j}{i} \cdot \binom{26+j}{10-i}}{\binom{32}{2} \cdot \binom{30}{10}} \\
&= \ldots
\end{aligned}
$$

3.13 Zahl k als Summe ganzer Zahlen

Es ist $\#\{(i_1, ..., i_n) \in N_0^n | i_1 + ... + i_n = k\} = \binom{n+k-1}{k}$
k Reißkörner auf n Positionen verteilen, mit Mehrfachbesetzung $\Rightarrow \binom{n+k-1}{k}$
$\#\{(i_1, ..., i_n) \in N^n | i_1 + ... + i_n = k\}$ nur positive Zahlen
$\#\{(i_1, ..., i_n) \in N_0^n | i_1 + ... + i_n = k - n\}$
$= \binom{n+(k-n)-1}{(k-n)} = \binom{k-1}{k-n}$

4 Übung – Bedingte Unabhängigkeit, "Bridge", "Ziegenproblem"

Definition 1 *(Unabhängigkeit und bedingte W'keiten) Seien A, B zwei Ereignisse mit $P(B) > 0$. Dann ist die bedingte W'keit von A unter B definiert durch*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Definition 2 *zwei Ereignisse A, B heissen unabängig, gdw. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.*

Nutzen:
Sind zwei Ereignisse unabhängig, so gilt

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

"Das B eintritt, ist egal."
Bei disjunkten Ereignissen gilt $A \cap B = \emptyset$ die Ereignisse sind abhängig voneinander.
Bsp.: "Kopf-Zahl" $\Rightarrow$ kommt Kopf, kann nicht Zahl kommen.

4.16 Bedingte Unabhängigkeit

Satz 1 *(Bedingte Unabhängigkeit)*
Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, B, C drei Ereignisse, wobei $P(C) > 0$ gelte.
Dann heißen die Ereignisse A und B bedingt unabhängig unter C, wenn gilt:

$$P(A \cap B|C) = P(A|C) \cdot P(B|C).$$

A, B unabhängig, d.h. es gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ zu zeigen ist:

$$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C}{P(C)} = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \cdot \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$$

Diese Behauptung scheint eher nicht zu stimmen, wr suchen ein Gegenbeispiel:
Eine Münze werde 2x geworfen $\Rightarrow \Omega = \{K, Z\}^2$. Es sei

A="Kopf im ersten Wurf" $= \{(K, K), (K, Z)\}$

A="Kopf im zweten Wurf" $= \{(K, K), (Z, K)\}$

Wie zeigen die Unabhängigkeit von A,B

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{(K, K)\} \\ P(A \cap B) &= \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B) = 1/2 \cdot 1/2 = \frac{1}{4} \checkmark \text{ A, B unabhängig} \end{aligned}$$

Sei nun $C =$"verschiedene Ergebnisse" $= \{(Z, K), (K, Z)\}$. Dann ist $A \cap B \cap C = \emptyset$ aber $A \cap C = \{(K, Z)\}$ und $B \cap C = \{(Z, K)\}$ und damit

$$P(A \cap B|C) = 0 \qquad P(A|C)P(B|C) = \frac{1}{4}\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

Also sind A und B <u>nicht</u> bedingt unabhängig unter C.

4.17 "Bridge" – einer kein Ass, anderer genau *k* Asse

Es gibt also vier Spieler "Nord", "Süd", "Ost" und "West", die je 13 von den 52 Karten erhalten. Ferner gibt es vier Asse. Wenn Spieler "Nord" kein Ass erhält, wie ist dann die W'keit dafür, dass der Partner genau k Asse ($k = 1, ..., 4$) erhält?
Verteilt man nun die Karten wie beschrieben, ergeben sich

$$\underbrace{\binom{4}{0}\binom{48}{13}}_{\text{"Nord"}} \cdot \underbrace{\binom{4}{k}\binom{35}{13-k}}_{\text{"Süd"}} \cdot \underbrace{\binom{26}{13}}_{\text{"Ost"}}\underbrace{\binom{13}{13}}_{\text{"West"}} \quad (k = 1, ..., 4)$$

Möglichkeiten der Karten verteilungen.

Das Verteilen der Karten ist ein Laplaceexperiment. $\Omega = \{(D_1, D_2, D_3, D_4)|D_i \subset \{1, ..., 52\}, \#D_i = 13, D_i \cap D_j = \emptyset\,(i \neq j)\}$ wobei o.B.d.A D_1 die Karten von Spieler "Nord" und D_2 die Karten von Spieler "Süd" sind.

Die W'keit ergibt sich nun aus
A:="Spieler Nord hat kein Ass."
B:="Spieler Süd hat k Asse.", $k = 1, ..., 4$.
Gesucht ist $P(B_k|A) = \frac{B_k \cap A}{P(A)} = \frac{\#(B_k \cap A)}{\#A}$. $\#A$ ergibt sich aus

$$\binom{4}{0}\binom{48}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}$$

also ergibt sich insgesamt

$$P(B_k|A) = \frac{B_k \cap A}{P(A)} = \frac{\#(B_k \cap A)}{\#A} = \frac{\binom{4}{0}\binom{48}{13} \cdot \binom{4}{k}\binom{35}{13-k} \cdot \binom{26}{13}\binom{13}{13}}{\binom{4}{0}\binom{48}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}\binom{13}{13}} = \frac{\binom{4}{k}\binom{35}{13-k}}{\binom{39}{13}}$$

k	0	1	2	3	4
$P(B_k\|A)$	0.18	0.41	0.31	0.09	0.01

4.18 Ziegenproblem

Es gibt drei Türen, hinter einer steht ein Auto. Der Kandidat wählt eine der Türen aus, und der Moderator öffnet daraufhin eine andere, hinter der das Auto nicht steht. Der Kandidat darf sich nun noch einmal umentscheiden. Sollte er dies tun?

Sei T_i = "Auto ist hinter Tür i", $i = \{1, 2, 3\}$ und
A = " Kandidat bleibt bei seiner Wahl."
Dann gilt $P(T_i) = 1/3$, $i = 1, 2, 3$. Ausserdem sind T_1, T_2, T_3 und A unabhängig.
Die zuerst gewählte TÜr heisse o.B.d.A T_1.

$$\begin{aligned}
P(''Kandidat gewinnt Auto'') &= P(\underbrace{(T_1 \cap A) + (T_2 \cap A^c) + (T_3 \cap A^c)}_{disjunkt}) \\
&= P(T_1 \cap A) + P(T_2 \cap A^c) + P(T_3 \cap A^c) \\
&= P(T_1)P(A) + P(T_2)P(A^c) + P(T_3)P(A^c) \\
&= \frac{1}{3}(P(A) + (1 - P(A)) + (1 - P(A)) \\
&= \frac{1}{3}(2 - P(A)) \\
&= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}P(A)
\end{aligned}$$

Wechselt man also, hat ma eine Gewinnchance von 2/3, sonst nur 1/3.

5 Übung – Verteilungen (geometrisch, neg binomial, poisson)

5.20 diskrete Verteilungsfunktionen

Name	Kürzel	WMF
Binomialverteilung	bin(n,p)	$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$
Hypergeometrische Vert.	Hyp(M, n, m)	$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{M-n}{n-k}}{\binom{M}{n}}$
geometrische Verteilung	geom(p)	$P(X=k)=(1-p)^{n-1}p,\text{ für } n\in\mathbb{N}$
Poissonverteilung	$P(\lambda)$	$P(X=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!},\ k\in\mathbb{N}_0$

Tabelle 2: diskrete Verteilungsfunktionen

5.21 X geom(p), Wartezeit, bis etwas zum erstenmal eintritt

Die geometrische Verteilung ist eine Wartezeitverteilung. "X ist die Wartezeit, bis etwas zum erstenmal eintritt." Oder: Man führt ein Experiment solange durch, bis ein gewünschtes Ereignis zum erstenmal eintritt.

Sei nun $X\sim geom(p)$, dann gilt ja

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p,\ k\in\mathbb{N}$$

dabei sind $(1-p)^{k-1}$ die "schlechten" Ereignisse und p das, auf das gewartet wurde.

z.z.$\forall\ k,n\in\mathbb{N}$ gilt:

$$P(X=n+k|X>n)=P(X=k).$$

$$P(X=n+k|X>n)=\frac{P(X=n+k\text{ und }X>n)}{P(X>n)}$$

NR:$P(X>n)$

$$\begin{aligned}
P(X>n) &= \sum_{k=n+1}^{\infty} P(X=k) \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-p)^{k-1}\cdot p = p\cdot \sum_{k=n+1}^{\infty}(1-p)^{k-1} \\
\text{Indexverschiebung} &= p\cdot\sum_{0}^{\infty}(1-p)^{k-1+(n+1)} \\
&= p\cdot\sum_{0}^{\infty}(1-p)^{k+n} \\
&= p(1-p)^n\cdot\sum_{0}^{\infty}(1-p)^{k} \\
\text{geom. Reihe} &= p(1-p)^n\cdot\frac{1}{1-(1-p)} \\
&= p(1-p)^n\cdot\frac{1}{p} = (1-p)^n
\end{aligned}$$

NR:$P(X=n+k \text{ und } X>n)$
aus $X=n+k$ folgt $X>n$, also ist $X>n$ überflüssig

$$\begin{aligned}
P(X=n+k \text{ und } X>n) &= P(X=n+k) \\
&= (1-p)^{(n+k)-1}\cdot p
\end{aligned}$$

Es folgt also für

$$P(X=n+k)|X>n) = \frac{(1-p)^{(n+k)-1}\cdot p}{(1-p)^n} = (1-p)^{k-1} = P(X=k).$$

Dies nennt man auch die "Gedächtnislosigkeit der geometrishcen Verteilung". Die W'keit, das beim 21ten Mal "Kopf" kommt, ist genauso groß, wie beim ersten, 5ten oder sonstigen Mal.

5.22 X negBin(r,p), Wartezeit, bis etwas zum r-ten Mal eintritt

Ist X die Anzahl der Versuche, bis A zum ersten Mal eintritt, so gilt

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1}p,\ k\in\mathbb{N}.$$

Sei jetzt X die Anzahl der Versuche, bis A zum zweiten Mal eintritt, dann gilt

$$P(X=k) = (k-1)(1-p)^{k-2}p^2,\ k\in\mathbb{N}_{\geq 2}$$

denn $X=k$ gilt gdw. das Ereignis A in der $k$ten Wiederholung eintritt und genau einmal in den vorangegangenen Versuchen eingetreten ist. Es kommen ja $k-2$-mal "Mißerfolge" und 2-mal Erfolge.
Kurzschreibweise: $X\sim negBin(2,p)$

Sei X die Wartezeit, bis das Ereignis zum r-ten Mal eintritt. Dann zeigt man analog

$$P(X = k) = \binom{k-1}{r-1}(1-p)^{k-r}p^r,\ k \in \mathbb{N}_{\geq r}$$

Kurzschreibweise: $X \sim negBin(r, p) \quad geom(p) = negBin(1, p)$

5.23 X bin(n, p) und X P(lambda) (poisson)

5.23.1 a) X ist binomialverteilt

X ist die Anzahl der Erfolge bei n Versuchswiederholungen; Das Ereignis A hat die Erfolgswahrscheinlichkeit p.

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k},\ K = 0, ..., n \\
P(\text{"X ist gerade"}) &= \sum_{\substack{k=0 \\ \text{k gerade}}}^{n} P(X = k) \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ \text{k gerade}}}^{n} \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} \\
& \quad I: \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} = 1 \quad \text{(alle Möglichkeiten)} \\
& \quad II: \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} (-p)^k (1-p)^{n-k} = (1-2p)^n \quad \text{(bin. Formel)} \\
I + II &= 2 \cdot \sum_{\substack{k=0 \\ \text{k gerade}}}^{n} \binom{k}{n} p^k (1-p)^{n-k} = 1 + (1-2p)^n \\
&\Rightarrow P(X\, gerade) = \frac{1}{2}(1 + (1-2p)^n)
\end{aligned}$$

5.23.2 b) X ist poissonverteilt

Es ist $X \sim P(\lambda)$ und somit gilt $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},\ k \in \mathbb{N}_0$.

$$\begin{aligned}
P(\text{"X ist gerade"}) &= \sum_{\substack{k=0 \\ \text{k gerade}}}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{(Gleicher Trick:)} \\
& \quad I: \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = 1 \\
& \quad II: \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{-\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^k}{k!} \\
& \quad = e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda} = e^{-2\lambda} \\
& \quad I + II: 2\sum_{\substack{k=0 \\ \text{k gerade}}}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = 1 + e^{-2\lambda} \\
\Rightarrow P(\text{"X ist gerade"}) &= \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda})
\end{aligned}$$

6 Übung – Erwartungswert und Varianz

6.26 Erwartungswert und Varinz

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert

Sei X gleichverteilt auf den Zahlen 1,...,n, $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$$P(X = k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, ..., n.$$

$X \sim unif(1, ..., n)$. Der Erwartungswert von X ergibt sich zu

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot P(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \\ &\overset{FS}{=} \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

Die Varianz ergibt sich zu

$$\begin{aligned} var(X) &= E(X - EX)^2 \quad \text{"mittlere quadratische Abweichung von seinem Erwartungswert"} \\ &= E(X^2) - (EX)^2 \\ & \quad NR: \\ & \quad E(X^2) = E(f(x)),\ f(x) = x^2 \\ & \qquad = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X = k) \\ & \qquad = \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ & \qquad \overset{FS}{=} \frac{1}{n} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}. \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - (\frac{n+1}{2})^2 \\ &= \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)}{12} = \frac{4n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 6n - 3}{12} \\ &= \frac{n^2 - 1}{12} \leftarrow \text{hohe Varianz.} \end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert

Sei X nun geometrishc verteilt, also $X \sim geom(p)$. Bestimmen Sie $E(z^X)$, $|z| \leq 1$. Erinnerung: Die WMF von geom(p) is $P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p,\ k \in \mathbb{N}$. (X ist die Wartezeit)

Der Erwartungswert ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
E(z^X) &= \sum_{k=1}^{\infty} z^k P(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} z^k (1-p)^{k-1} p \\
&= pz \cdot \sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1}(1-p)^{k-1} = pz \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (z(1-p))^{k-1} \\
Indexversch. &= \sum_{k=0}^{\infty} (z(1-p))^k \\
FS, |z| \leq 1 &= \frac{pz}{1-z(1-p)}
\end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert

Es sei nun X_n die Anzahl der Fixpunkte bei einer zufälligen Permutation von n Elementen. Bestimmen Sie $E(X_n)$.

Sei $A_i :=$ "Element i ist ein Fix¿punkt, dann stellen wir X_n als Summe von Indikatorfunktionen dar

$$\begin{aligned}
X_n &= \sum_{k=1}^{n} 1_{[A_{n,k}]} \\
E1_{[A_{n,k}]} &= 0 \cdot P(1_{[A_{n,k}]} = 0) + 1 \cdot P(1_{[A_{n,k}]} = 1) \\
&= P(1_{[A_{n,k}]} = 1) \\
&= P(A_{n,k})
\end{aligned}$$

$\boxed{E1_{[A]} = P(A)}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n-1)!}{n!} \\
EX_n &= \sum_{k=1}^{n} E1_{[A_{n,k}]} \\
&= \sum_{k=1}^{n} P(A_{n,k}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{n!} = 1 \quad \rightarrow \text{ein Brief kommt immer an.}
\end{aligned}$$

6.27 Erwartungswert

Eine Zufallsvariable nehme die Werte 1,2,3,... an und habe einen endlichen Erwartungswert, d.h. E(X) $< \infty$. Zeigen Sie, dass gilt

$$E(X) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X \geq j).$$

Nebenrechnung:

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) &= 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) + ... \\
&= P(X=1) + 2P(X=2) + ... \\
&= P(X=1) + \\
&\quad\; P(X=2) + P(X=2) + \\
&\quad\; P(X=3) + P(X=3) + P(X=3) + \\
&\quad\; ...
\end{aligned}
$$

oder als Tabelle der Summen

$_n\backslash^k$	1	2	3	4	...	∞
1						
$\vdots$						
k						

Wir können nun also den Erwartungswert berechnen

$$
\begin{aligned}
z.z.\ EX &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k). \\
EX &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot P(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} P(X=k) \\
(Tabelle) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(X=k) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n) \;\square
\end{aligned}
$$

7 Übung – stetige ZV und deren Verteilungen

Die Verteilung beliebiger Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}$ wird durch die sogenannte Verteilungsfunktion

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} \to [0,1] \\ x \to P(X \leq x) =: F(x) \end{cases}$$

eindeutig festgelegt.

Existiert eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)\, dy$$

so heisst X absolut stetig verteilt und f nennt man eine Dichte von X.
Allgemein folgt aus $P(a < X < b)$, dass $a < b$ und

$$P(a < X < b) = \underbrace{P(X < b)}_{=F_X(b)} - \underbrace{P(X \leq a)}_{=F_X(a)} = \underbrace{F_X(b) - F_X(a)}_{\text{Wenn man die Verteilungsfunktionen hat.}}$$

Ist dies derFall, so gilt

$$= \boxed{F_X(b) - F_X(a)} = \int_{-\infty}^{b} f(y)\, dy - \int_{-\infty}^{a} f(y)\, dy = \boxed{\int_{a}^{b} f(y)\, dy}$$

Für $P(A|B)$ gilt $\frac{P(A \text{ und } B)}{P(B)}$

7.30 Verteilungsfunktion und Dichte

Sei X eine absolutstetig verteilte ZV mit der Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot (1 - x^2) & \text{, falls } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{, falls } |x| > 1. \end{cases}$$

Die Dichtefunktion nimmt also nur in dem Intervall [-1,1] Werte verschieden von 0 an. Also kann man auch schreiben $f(x) = c \cdot (1 - x^2)1_{[-1,1]}(x)$.

a) Welchen Wert hat die Konstante c?

Es muss gelten

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dy \stackrel{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} c \cdot (1 - y^2) 1_{[-1,1]}(y)\, dy = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{-1}^{1} c \cdot (1 - y^2)\, dy = c \cdot (y - \frac{y^3}{3})|_{-1}^{1}$$

$$\Leftrightarrow \quad c \cdot \frac{4}{3} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{3}{4}.$$

b) Bestimmen Sie dei Verteilungsfunktion von X

Die Verteilungsfunktion von X ergibt sich aus

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy = \int_{-\infty}^{x} \frac{3}{4}(1-y^2)1_{[-1,1]}(y)\,dy \\
X < -1: \; F_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} 0\,dy = 0 \\
X > 1: \; F_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y)\,dy = 1 \quad \left(\left[\frac{3}{4}y - \frac{1}{4}y^3\right]_{-1}^{1} = 1 \right) \\
-1 \leq X \leq 1: \; F_X(x) &= \int_{-1}^{x} f_X(y)\,dy = \int_{-1}^{x} \frac{3}{4}(1-y^2)\,dy \\
&= \left[\frac{3}{4}y - \frac{1}{4}y^3\right]_{-1}^{x} = \frac{1}{4}(-x^3+3x+2).
\end{aligned}
$$

Also ergibt sich die Verteilungsfunktion von X zu

$$
F_X(x) = \begin{cases} 0 & , \; x < -1 \\ \frac{1}{4}(-x^3+3x+2) & , \; -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & , \; x > 1 \end{cases}
$$

c) Berechnen Sie $P(-0.5 < X < 0$ und $P(X > 0|X > -0.5)$

mit unserer Verteilungsfunktion folgt:

$$
\begin{aligned}
P(-0.5 < X < 0) &= P(X < 0) - P(X \leq -0.5) = F_X(0) - F_X(-0.5) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2} + 2\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{8} - \frac{3 \cdot 4}{8} + \frac{16}{8}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1-12+16}{8}\right) \\
&= \frac{16}{32} - \frac{5}{32} = \frac{11}{32}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X > 0|X > -0.5) &= \frac{P(\overbrace{X > 0 \; und \; X > -0.5}^{=X>0})}{P(X > -0.5)} = \frac{\int_0^\infty f(y)\,dy}{\int_{-0.5}^\infty f(y)\,dy} \\
&= \frac{\int_0^1 \frac{3}{4}(1-y^2)\,dy}{\int_{-0.5}^1 \frac{3}{4}(1-y^2)\,dy} = \frac{16}{27}
\end{aligned}
$$

7.31 Verteilungsfunktion und Dichte

a) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion

Sei X eine stetig verteilte Zufallsvariable und $Y := X^2$.

$$\begin{aligned}
F_Y(y) = P(Y \leq y) &= P(X^2 \leq y) = P(|X| \leq \sqrt{y}) \\
&= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = P(X \leq \sqrt{y}) - P(X < -\sqrt{y}) \\
&= P(X \leq \sqrt{y}) - P(X \underbrace{\leq}_{\text{da stetig}} -\sqrt{y}) \\
&= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})
\end{aligned}$$

b)Bestimmen Sie die Dichte und die Verteilungsfunktion

Y ist der Flächeninhalt eines Quadrats zufälliger Seitenlänge X, $Y := X^2$. Sei zusätzlich $X \sim exp(\lambda)$.
Gesucht: Dichte und Verteilungsfunktion von Y.
aus $X \sim exp(\lambda)$ folgt $f_X(x) = \lambda exp(-\lambda x) 1_{[0,\infty)}(x)$ und $F_X(x) = (1 - exp(-\lambda x)) 1_{[0,\infty)}(x)$.
mit Teil a) erhält man für $Y \geq 0$

$$F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - \underbrace{F_X(-\sqrt{y})}_{=0} = F_X(\sqrt{y}) = 1 - exp(-\lambda\sqrt{y})$$

7.32 Bestimme Verteilung – (Gedächtnislosigkeit von exp und geom)

Sei X expoinentialverteil mit Parameter λ Also

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{, falls } x \geq 0 \\ 0 & \text{, falls } x < 0 \end{cases}$$

gilt.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Exponentialverteilung ebenso wie die geometrische Verteilung die sog. *Gedächtnislosigkeit* besitzt, d.h. es gilt

$$P(X \geq x + y | X \geq x) = P(X \geq y) \ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

Sei nun $Y := \lceil X \rceil$. Dann ist Y eine diskrete Zufallsvariable. Bestimmen Sie die Verteilung von Y. (Es ist $\lceil x \rceil$ die Rundung von $x \in \mathbb{R}$ auf de nächste ganze Zahl.)
$X \sim exp(\lambda)$
Gesucht ist die Verteilung von $\lceil X \rceil$.

$$\begin{aligned}
P(\lceil X \rceil = k) &= P(k - 1 < X \leq k) \\
&= \int_{k-1}^{k} \lambda exp(-\lambda x)\, dx \\
&= (1 - exp(-\lambda x))|_{k-1}^{k} = exp(-\lambda(k-1)) - exp(-\lambda k) \\
&= exp(-\lambda(k-1))(1 - exp(-\lambda)) \\
&= exp(-\lambda)^{k-1}(1 - exp(-\lambda)) \\
& \quad p = 1 - exp(-\lambda) \qquad \} \Rightarrow \lceil X \rceil \sim geom(1 - e^{-\lambda})
\end{aligned}$$

Dichte und Verteilungsfunktion ergeben die Verteilung, danach rechnet man noch das Integral aus.

8 Übung – stetige ZV und deren Verteilungen

diskret	$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(X = k)$	$Eg(X) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)P(X = k)$
(absolut) stetig	$EX = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx$	$Eg(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(X) f_X(x)\,dx$

Tabelle 3: Erwartungswerte

8.34 gemeinsame Verteilungsfunktion, gemeinsame Dichte

Für zwei Zufallsvariablen X, Y ist die gemeinsame Verteilungsfunktion

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y).$$

Eine Funktion $f_{X,Y}$ heißt gemeinsame Dichte von X, Y, falls gilt

$$F_{X,Y} = \int\limits_{-\infty}^{x} \int\limits_{-\infty}^{y} f_{x,y}(u, v)\,dvdu.$$

Ausserdem gilt

$$X, Y \text{ unabhängig } \Leftrightarrow f_{X,Y} = f_X \cdot f_Y \Leftrightarrow F_{X,Y} = F_X \cdot F_Y$$

und

$$P((X, Y) \in A) = \iint\limits_{A} f_{X,Y}(x, y)\,dydx$$

8.35 Erwartungswert

Sei $X \sim \exp(\lambda)$.

a) Sei $a \in \mathbb{R}$ fest. Bestimmen Sie $E(min\{X, a\})$.

Die zugehörige Dichte funktion zur Exponentialverteilung ist $f_X(x) = \lambda \cdot \exp(-\lambda x)\mathbb{1}_{[0,\infty]}(x)$. Sei $g(x) := min\{x, a\}$, dann suchen wir also $Eg(X)$. Wir betrachten de beiden Fälle $a > 0$ und $a < 0$.

$a < 0$

$$\begin{aligned}
Emin\{X,a\} &= \int_{-\infty}^{\infty} min\{x,a\} \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda x) 1_{[0,\infty]}(x)\, dx \\
(1_{[-\infty,0]} = 0) &= \int_{0}^{\infty} min\{x,a\} \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda x)\, dx \\
(a<0) &= \int_{0}^{\infty} a \cdot \lambda \cdot \exp(-\lambda x)\, dx = a \cdot \int_{0}^{\infty} \lambda \cdot \exp(-\lambda x)\, dx \\
\underbrace{(\int_0^\infty f_X(x) = 1)}_{\text{Dichte von } exp(\lambda) \text{ im ges. Bereich}} &= a.
\end{aligned}$$

$a > 0$

$$\begin{aligned}
Emin\{X,a\} &= \int_{-\infty}^{\infty} min\{x,a\} \cdot \lambda \exp(-\lambda x) 1_{[0,\infty]}\, dx \\
&= \int_{0}^{\infty} min\{x,a\} \cdot \lambda \exp(-\lambda x)\, dx \\
&= \int_{0}^{a} x \cdot \lambda \exp(-\lambda x)\, dx + \int_{a}^{\infty} a \cdot \lambda \exp(-\lambda x)\, dx \\
(\text{part. Int.}) &= -x \exp(-\lambda x)|_0^a + \int_0^a \exp(-\lambda x)\, dx - a\, \exp(-\lambda x)|_a^\infty \\
&= -a\, \exp(-\lambda a) - \frac{1}{\lambda} \exp(-\lambda x)|_0^a + a\, \exp(-\lambda a) = -\frac{1}{\lambda} \exp(-\lambda x)|_0^a \\
&= \frac{1}{\lambda}(1 - \exp(-\lambda a)).
\end{aligned}$$

b) Für welche $T \in \mathbb{R}$ existiert $E(e^{tX})$ und welcher Wert ergibt sich dann?

Sei $t \in \mathbb{R}$, Gesucht $E(e^{tX})$.

$$\begin{aligned}
E(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \lambda \cdot \exp(-\lambda x) 1_{[0,\infty]}(x)\, dx \\
&= \int_0^\infty e^{tx} \lambda\, \exp(-\lambda x)\, dx = \lambda \int_0^\infty e^{tx}\, \exp(-\lambda x)\, dx \\
&= \lambda \int_0^\infty e^{x(t-\lambda)}\, dx \\
&= \frac{\lambda}{t-\lambda} \cdot e^{x(t-\lambda)}|_0^\infty = \begin{cases} \infty & , t > \lambda \\ \frac{\lambda}{t-\lambda} & , t < \lambda \end{cases}
\end{aligned}$$

8.36 Beweisaufgabe

zz.: $\varphi : a \mapsto E(X-a)^2$ nimmt in Minimum in $a = EX$ an.
Es ist

$$\begin{aligned}
\varphi(a) &:= E(X-a)^2 \\
&= (EX)^2 - 2aEX + a^2 \leftarrow \text{nach oben geöffnete Parabel, die also ihr Minimum im Scheitelpunkt hat } \Rightarrow \varphi'(a) = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi'(a) &= 2a - 2EX = 0 \\
&\Leftrightarrow a = EX \quad \square
\end{aligned}$$

8.37 (Glühbirnen)

Es gilt $X \sim \exp(\lambda_A)$ und $Y \sim \exp(\lambda_B)$, X, Y unabhängig.
Gesucht $P(X < Y)$

$$
\begin{aligned}
P(X<Y) &= P((x,y) \in D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}) \\
(X, Y \text{ unabhängig}) &= \iint_D f_{X,Y}\, dydx = \iint_D f_X \cdot f_Y\, dydx \\
&= \iint_D \lambda_A \cdot \exp(-\lambda_A x) 1_{[0,\infty]}(x) \cdot \lambda_B \cdot \exp(-\lambda_B x) 1_{[0,\infty]}(x)\, dydx \\
&= \iint_{D \geq 0} \lambda_A \exp(-\lambda_A x) \lambda_B \cdot \exp(-\lambda_B x)\, dydx \\
&= \int_0^\infty \int_x^\infty \underbrace{\lambda_A \exp(-\lambda_A x)}_{konstant} \cdot \underbrace{\lambda_B \exp(-\lambda_B y)}_{Stfkt.: -\exp(-\lambda_B y)}\, dydx \\
&= \int_0^\infty \lambda_A \exp(-\lambda_A x) \cdot [-\exp(-\lambda_B y)|_x^\infty]\, dx \\
&= \lambda_A \int_0^\infty \exp(-\lambda_A x) \exp(-\lambda_B x)\, dx \\
&= \lambda_A \int_0^\infty \exp(-x(\lambda_A + \lambda_B))\, dx \\
&= -\frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B} \cdot \exp(-x(\lambda_A + \lambda_B))|_0^\infty \\
&= \frac{\lambda_A}{\lambda_A + \lambda_B}.
\end{aligned}
$$

Es gilt auch $X \sim \exp(\lambda)$, $EX = \frac{1}{\lambda}$

9 Übung – gemeinsame Verteilungsfunktionen, Erwartungswert, Unabhängigkeit

9.33 gemeinsame Verteilungen

Allgemein gilt für die Erwartungswerte von gemeinsamen Verteilungen

$$\begin{aligned}\text{diskret:} \quad Eg(X,Y) &= \sum_{x,y} g(x,y)P(X=x, Y=y)\\ \text{stetig:} \quad Eg(X,Y) &= \int_X \int_Y g(x,y) f_{XY}(x,y)\, d(x,y)\end{aligned}$$

9.34 gemeinsame Verteinlung (WMF)

zweimaliger Würfelwurf, X_1, X_2, $Y_1 := min\{X_1, X_2\}$

a) Tabelle von Y_1, Y_2

$Y_2 \backslash Y_1$	1	2	3	4	5	6	$P(Y=j)$
1	1/36	0	0	0	0	0	1/36
2	2/36	1/36	0	0	0	0	3/36
3	2/36	2/36	1/36	0	0	0	5/36
4	2/36	2/36	2/36	1/36	0	0	7/36
5	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	0	9/36
6	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	11/36
$P(Y=i)$	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36	1

Tabelle 4: Die WMF von Y_1 und Y_2

innen steht die gemeinsame WMF von Y_1 und Y_2. Die Rand- (oder auch marginal-)verteilungen erhält man aus den Zeilen- bzw. Spaltensummen. Die Summe der Zeilen- bzw. Spaltenelemente muss 1 ergeben.

b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $E(Y_2 - Y_1)$ **und** $E(Y_1 + Y_2)$

$$\begin{aligned}E(Y_2 - Y_1) &= \sum_{k,l=1}^{6} (l-k)P(Y_2 = l, Y_1 = k)| \text{Es fallen alle Terme weg, wo } P(...) = 0 \text{ oder } (l-k) = 0\\ &= \sum_{k=1}^{6} \sum_{l=k+1}^{6} (l-k)\frac{2}{36}\\ &= \frac{2}{36} \cdot \sum\sum ... = \frac{2}{36}(15+10+6+3+1) = \frac{2}{36} \cdot 35\\ &= \frac{70}{36} = \frac{35}{18}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y_1+Y_2) &= \sum_{k,l=1}^{6}(l+k)P(Y_2=l,Y_1=k)\\
&= \ldots\\
(aber:\ Y_1+Y_2) &= min\{X_1,X_2\}+max\{X_1,X_2\}=X_1+X_2\\
(also) &= E(Y_1+Y_2)=E(X_1+X_2)=E(X_1)+E(X_2)=2E(X_1)\\
E(X) &= \text{Mitte von }\{1,2,...,6\}=\sum_{k=1}^{6}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{6}k\frac{1}{6}=3.5\\
E(Y_1+Y_2) &\Rightarrow 2\cdot 3.5=7.
\end{aligned}$$

9.34.1 c) Sind Y_1 und Y_2 unabhängig?

Y_1 und Y_2 unabhängig $\Rightarrow P(Y_1=y_1,Y_2=y_2)=P(Y_1=y_1)\cdot P(Y_2=y_2)\ \forall y_1,y_2$
Hier findet man leicht ein Gegenbeispiel:

$$P(Y_1=1,Y_2=3)=\frac{2}{36}\neq\frac{55}{1296}=\frac{11}{36}\cdot\frac{5}{36}=P(Y_1=1)\cdot P(Y_2=3)$$

$\Rightarrow Y_1,Y_2$ nicht unabhängig.

9.35 gemeinsame Dichte

Sei die gemeinsame Dichte wie beschrieben $f_{X,Y}(x,y)=c\cdot 1_Q(x,y)$ Also konstant, wenn (x,y) in der Fläche, 0 sonst.
Es muss gelten $\iint f_{X,Y}(x,y)\,d(x,y)\stackrel{!}{=}1$.

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow\quad &= c\cdot\iint 1_Q(x,y)\,d(x,y)=c\cdot\text{ Flächeninhalt von Q}\\
&= c\cdot 2\stackrel{!}{=}1\qquad(\sqrt{1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}=(\sqrt{2})^2=2)\\
\Rightarrow\quad & c=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Die gemeinsame Dichte ist also $f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2}\cdot 1_Q(x,y)$.

a) Bestimmen Sie die Randdichten f_X und f_Y zu X und Y

Die Randdichte erhält man durch die Zeilen- bzw. Spaltensumme im diskreten, und durch die Zeilen- bzw Spaltenintegrale im stetigen Fall.

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int f_{X,Y}(x,y)\,dy\\
f_Y(y) &= \int f_{X,Y}(x,y)\,dx
\end{aligned}$$

Die Grenzen des Integrals ergeben sich aus den Funktionen der Flächenbegrenzung Hier gilt aus Symmetriegründen $f_X(x)=f_Y(y)$ und für die Randverteilung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f_X(x) = f_Y(y) &= \int \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_Q(x,y) \\
(-1 \leq x \leq 0): &= \int_{-x-1}^{x+1} \frac{1}{2} dy \\
&= \frac{1}{2} y|_{-x-1}^{x+1} = \frac{1}{2}(x+1) - \frac{1}{2}(-x-1) = 1 + x. \\
(0 \leq x \leq 1): &= \int_{x-1}^{-x+1} \frac{1}{2} dy \\
&= \frac{1}{2} y|_{x-1}^{-x+1} = \frac{1}{2}(-x+1) - \frac{1}{2}(x-1) = 1 - x.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$f_X(x) = f_Y(y) = \begin{cases} 1+x & \text{, für } (-1 \leq x \leq 0) \\ 1-x & \text{, für } (0 \leq x \leq 1) \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Bei dieser Verteilung spricht man von der Dreiecksverteilung.

b) Sind die ZV X und Y stochastisch unabhängig?

Sind X und Y unabhängig, so gilt $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$, hier also $f_X(x) \cdot f_Y(y) = F_{X,Y}(x,y)$?
Als Gegenbeispiel findet man

$$\begin{aligned}
f_X(\frac{1}{2}) \cdot f_Y(\frac{3}{4}) &= (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{3}{4}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}. \quad \textit{aber} \\
f_{X,Y}(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}) &= 0 \quad \text{, da der Punkt außerhalb des Quadrats liegt.} \\
\Rightarrow & \quad \frac{1}{8} \neq 0 \Rightarrow \; X, Y \text{ nicht unabhängig.}
\end{aligned}$$

10 Übung – Kovarianz, multinomial- und geometrische Verteilung

Die Kovarianz ist definiert durch

$$\boxed{Cov(X,Y) = E((X-EX)(Y-EY)) = E(XY) - EXEY}$$

10.45 Kovarianz, Unabhängigkeit

Es seien X, Y, Z Zufallsvariablen mit existierendem zweiten Moment und $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass die Kovarianz ein bilinearer Operator ist, d.h. es gilt

1. $Cov(aX + bY, Z) = aCov(x, Z) + bCov(Y, Z)$ und
2. $Cov(Z, aX + bY) = aCov(Z, X) + bCov(Z, Y)$

$$\begin{aligned}
Cov(aX + bY, Z) &= E([(aX + bY) - \underbrace{E(aX + bY)}_{=aEX+bEY}][Z - EZ]) \\
&= E([a(X - EX) + b(Y - EY)][Z - EZ]) \\
&= E(a(X - EX)(Z - EZ) + b(Y - EY)(Z - EZ)) \\
&= aE((X - EX)(Z - EZ)) + bE((Y - EY)(Z - EZ)) \\
&= aCov(X, Z) + bCov(Y, Z)
\end{aligned}$$

b)

c) unkorrelierte Zufallsvariablen sind nicht notwendigerweise unabhängig

Sdin zwei ZV unabhängig , sind sie unkorreliert.

10.46 Multinomialverteilung, Verteilung, Kovarianz, Unabhängigkeit

10.47 Faltung der geometrischen Verteilung

11 Übung – Transformationssatz, W' erzeugende Fkt.

11.1 Aufgabe –

11.2 Aufgabe – Transformationsaufgabe (Ü11A51 oder KLA5)

Bestimme f_{x_1}, f_{x_2}: (Berechne $f_{(x_1,x_2)}$)
definiere den Vektor ... Formel:

$$f_{(x_1,x_2)}(x_1,x_2) = |det(\Psi^{-1})'(x_1,x_2)| \cdot f_{(u_1,u_2)}(\Psi^{-1}(x_1,x_2))$$

1. Berechne die Umkehrfunktionen von X_1, X_2, so erhält man Ψ^{-1}.
2. Bilde nun die Ableitung $\rightsquigarrow (\Psi^{-1})'$
3. Rechne nun den **Betrag** der Determinante aus $|det((\Psi^{-1})')|$
4. Nun sind alle Teile vorhanden => setze die Formel zusammen.
5. Durch Ausintegrieren erhält man die Randdichten.

11.3 Aufgabe – Faltung

11.4 Hausaufgabe – Transformationssatz

11.5 Hausaufgabe – w'erzeugende Funktion, Faltung

$$\begin{aligned}
g_X(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} s^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (ps)^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (ps)^k (1-p)^n (1-p)^{-k} \\
&= (1-p)^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (ps)^k (1-p)^{-k} \\
&= (1-p)^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\frac{ps}{1-p}\right)^k \qquad \text{Binomischen Reihe: } \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n = (1+x)^a \\
&= (1-p)^n (1 + \frac{ps}{1-p})^n \\
&= ((1-p) + ps)^n.
\end{aligned}$$

12 Übung – momenterzeugende Funktion

Sei X eine Zufallsvariable. Die momenterzeugende Funktion von X ist definiert als

$$\varphi_X(t) = Ee^{tX} = \int_0^\infty e^{tx} \cdot f_X(x)dx$$

12.1 Aufgabe – momenterzeugende Funktion zur Standardnormalverteilung

12.2 Aufgabe – momenterzeugende Funktion zur Gleichverteilung

12.3 Hausaufgabe – momenterzeugende Funktion zur Gamma-Verteilung

12.4 Hausaufgabe –