Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Ein Modell für Zufallsexperimente

Ω: Ergebnisraum, enthält die möglichen Ergebnisse des Zufallsexperimentes
$\mathcal{A}$: System der Ereignisse $A \subset \Omega$
$P: \ \omega \to [0,1]$: Abbildung, die jedem Ereignis A seine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ zuordnet. Es gilt: $P(A) \geq 0$, $P(\omega) = 1$ und

Für alle $A_1, A_2, \dots \in \omega$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ (Folge von paarweise disjunkten Ereignissen) gilt:

$$\boxed{P(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)} \qquad (\sigma - \text{Additivität})$$

Satz 1 *erste Folgerungen*

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(A) \leq 1$
3. $P(A^c) = 1 - P(A)$
4. $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$ *Homogenität*
5. $P(A_1 + \dots + A_k) = P(A_1) + \dots P(A_k)$ *endliche Additivität*

Satz 2 *weitere Folgerungen*

1. *boolesche Ungleichung:* $P(A_1 \cup \dots \cup A_k) \leq P(A_1) + \dots + P(A_k)$ *wichtig hierbei ist, dass nicht vorrausgesetzt wird, das* $A_1, ..., A_k$ *paarweise disjunkt sind.*
2. *Formel von Sylvester-Poincarré, Siebformel*

$$\boxed{P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \sum_{H \subset \{1,\dots,n\}} P(\bigcap_{i \in H} A_i)} \qquad \textit{(Siebformel)}$$

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{i=1}^{3} A_i): \quad P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \quad &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &\quad - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) \\ &\quad + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ P(\bigcup_{i=1}^{2} A_i): \qquad P(A_1 \cup A_2) \quad &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \end{aligned}$$

2 Laplace-Experimente, elementare Kombinatorik

Ein Laplace-Experiment liegt vor, wenn

1. $\#\Omega < \infty$ (endlicher Ergebnisraum)
2. $\mathcal{A} = R(\Omega)$ (alle Teilmengen von Ω kommen als Ergebnis in Frage)
3. $\boxed{P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Möglichkeiten}}{\text{Anzahl der Möglichkeiten isg}}}$

Urnenmodelle und passende Formeln:

ziehen von k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln	mit Zurücklegen (mW)	ohne Zurücklegen (oW)	
mit Beachtung derReihenfolge $Perm_k^n$	n^k	$\frac{n!}{(n-k)!} =$ $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$	unterschiedliche Objekte
ohne Beachtung derReihenfolge Kom_k^n	$\binom{n+k-1}{k}$	$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$	nicht unterscheidbare Objekte
	mit Mehrfachbesetzung	ohne Mehrfachbesetzung	Verteilen von k Objekten auf n Positionen

Tabelle 1: Urnenmodelle – (Kom sind Per, wobei die Elemente geordnet sind)

Erinnerung:
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ Fakultät
$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ "n über k" oder "k aus n", Binomial-Koeffizient

3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeit

3.1 Bedingte W'keiten

Es seien A und B Ereignisse in einem Zufallsexperiment. Welche Wahrscheinlichkeit hat B, wenn bekannt ist, dass A eintrit?

Definition 1 *Es sei A ein Ergebnis mit $P(A) > 0$. Die bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter A wird definiert durch*

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Satz 3 *(einige Definitionen)*

1. ***Multiplikationsregel***
   Sind $A_1, ..., A_n$ Ereignisse mit $P(A_1 \cap ... \cap A_n) > 0$, so gilt

   $$\boxed{P(A_1 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot ... \cdot P(A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1})}$$

2. ***Gesetz der totalen Wahrscheinlichkeit = Zerlegung***
   *Ist $A_1, ..., A_n$ eine **Ereignispartition** von Ω, d.h. $A_1 \cap ... \cap A_n = \Omega$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$, so gilt für alle Ereignisse B*

   $$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) P(A_i)}$$

   Hierbei ist $P(A_i) = 0$ zugelassen, der Summand wird dann als 0 interpretiert.

3. ***Formel von Bayes***
   Es seien $A_1, ...A_n$ und B wie oben und $P(B) > 0$. Dann ist

   $$\boxed{P(A_i|B) = \frac{P(A_i)\, P(B|A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)\, P(A_k)}}$$

3.2 Unabhängigkeit

Einer der zentralen Begriffe der Stochastik ist der , der (stochastischen) **Unabhängigkeit**.
B ist von A unabhängig, wenn die Information "A ist eingetreten" die W'keit für B nicht ändert $\Rightarrow P(B|A) = P(B)$ $\frac{P(B \cap A)}{P(A)} = P(B)$.

Definition 2 *(Unabhängigkeit)*
*Zwei Ereignisse A und B heissen **stochastisch unabhängig**, wenn $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt.*

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow A,\, B \textit{ unabhängig}}$$

Aus einer paarweisen Unabhängigkeit in einer Ereignisfamilie

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)\, P(A_j), \text{ für alle } i, j \in I, i \neq j$$

folgt **nicht** die totale Unabhängigkeit.

4 Diskrete Zufallsgrößen

4.1 Allgemeines

Oft interessiert man sich nicht für das Ereignis ω eines Zufallsexperimentes, sondern nur für einen hiervon abhängigen Wert $X(\omega)$.

Definition 3 *(ZV, Verteilung, WMF, Verteilungsfunktion)*

1. *Eine diskrete* ***Zufallsvariable (ZV)*** *ist eine Abbildung* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *mit endlich vielen oder abzählbar unendlich* ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$) *vielen Werten.*
2. *Die* ***Verteilung*** *einer diskreten ZV* X *ist die Abbildung* $A \to P(X \in A)$ $(= P(\omega \in \Omega : X(\omega)) \in A)$*, diese ist ein W'Maß.*
3. *Die* ***Wahrscheinlichkeitsmassenfunktion (WMF)*** P^X *einer diskreten ZV* X *wird definiert durch*
$$P^X : \mathbb{R} \to [0,1],\ P^X(x) = P(X = x)$$
4. *Die* ***Verteilungsfunktion*** F_X *einer diskreten ZV* X *wird definiert durch*
$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1],\ F_X(x) = P(X \leq x)$$

Massenfunktionen können beispielsweise durch ein Stabdiagramm illustriert werden.
Bem.:
i) Zu jeder ZV gehört eine Verteilung und verschiedene ZV können durchaus die gleiche Verteilung haben.
ii) Da durch die Abbildung X in der Regel unterschiedlich viele Argumentwerte ω zu einem Bildwert $X(\omega)$ zusammengefasst werden, sind in der Regel selbst bei einem Laplace-Experiment die Werte $P(X = x)$ nicht gleichgroß.

4.2 Einige wichtige Verteilungen

4.2.1 Binomialverteilung $X \sim bin(n,p)$

X heißt binomialverteilt mit Parametern n und p, wenn gilt

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{für} \quad k = 0, 1, ..., n$$

Man erhält $Bin(n,p)$ als Verteilung der Anzahl X der Erfolge bei n unabhängigen Versuchswiederholungen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p.

4.2.2 Hypergeometrische Verteilung $X \sim Hyp(M, m, n)$ (LOTTO)

Eine ZV heißt hypergeometrisch verteilt mit Parametern M,m,n (alles natürliche Zahlen), wenn gilt

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{M-m}{n-k}}{\binom{M}{n}}$$

Typische Fragestellung ist nach der W'keit für zwei Richtige im Zahlenlotto "6 aus 49": $\frac{\binom{6}{2}\binom{49-6}{6-2}}{\binom{49}{6}}$
Die Verteilung taucht bei Stichproben ohne Zurücklegen auf.
Für große M $\rightsquigarrow$ Binomialverteilung

4.2.3 geometrische Verteilung $X \sim geom(p)$

Eine Art "Wartezeitverteilung": "Angenommen, ein Würfel wird solange geworfen, bis eine sechs erscheint..."
X heißt geometrisch verteilt mit Parameter p, wenn gilt

$$P(X = n) = (1-p)^{n-1} \cdot p, \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Diese Verteilung taucht immer dann auf, wenn ein Zufallsexperiment solange wiederholt wird, bis ein bestimmtes Ereignis eintritt, der Parameter ist die W'keit des Ereignisses, auf das gewartet wird.
Zählt man stattdessen die Anzahl der Misserfolge, so erhält man eine andere Version der geometrischen Verteilung:

$$P(X = n) = (1-p)^{n} \cdot p, \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

4.2.4 Poissonverteilung $X \sim pois(\lambda)$

Die *ZV* X heißt poisson-verteilt, mit Parameter λ ($\lambda > 0$), wenn gilt

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}, \; k \in \mathbb{N}_0$$

Satz 4 *("Das Gesetz der seltenen Ereignisse")*
Ist $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [0,1]$ eine Nullfolge mit $\lim\limits_{n\to\infty} n\, p_n = \lambda$, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^k = e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^k}{k!}$$

W'keit für k Erfolge bei n Wiederholungen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p.
Bekannt ist: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$

4.3 Erwartungswert und Momente

In diesem Abschnitt werden einige Verteilungsparameter eingeführt. Dies sind Zahlen, die bestimmte Aspekte einer Verteilung, wie beispielsweise die Lage oder die Streuung, beschreiben.

Definition 4 *(Erwartungswert $E(X)$)*
Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit WMF P_X. Dann wird der ***Erwartungswert*** *$E(X)$ von X defniniert durch*

$$\boxed{E(X) = \sum_{x\in\mathbb{N}} x \cdot P(X = x)}$$

Hierbei wird vorrausgesetzt, dass die Reihe absolut konvergiert, d.h. $\sum |x| p_x(x) < \infty$. Ist dies nicht der Fall, so sagt man, dass der Erwatungswert nicht existiert.

Beobachtungen:

- Der Erwartungswert einer Poissonverteilung mit Parameter λ ist gerade λ.

Erwartungswert von Funktionen von Zufallsvariablen

Oft kann man die interessierende Zufallsvariable Y als Funktion g einer anderen ZV schreiben

$$\Omega \quad \xrightarrow{X} \mathbb{R} \quad \xrightarrow{g} \mathbb{R} \quad Y =: g(x).$$

Satz 5 *Es gilt* $E\,g(X) = \sum_{x\in\mathbb{R}} g(X) \cdot P_X(x) = \sum_{x\in\mathbb{R}} g(X) \cdot P(X = x)$, *vorrausgesetzt, die Summen konvergieren absolut.*

Satz 6 *(Rechenregeln für Erwartungswerte)*
Seien X, Y *diskrete ZV und* $c \in \mathbb{R}$.
Vorrausgesetzt, dass die beteiligten Summen absolut konvergieren, dann gilt:

1. $E(X) = E(E(X))$
2. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
$$E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n)$$
3. $E(cX) = c \cdot E(X)$
4. $X \leq Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$

Definition 5 *(k-te Moment)*
Das ***k-te Moment*** *von X ist definiert als* $\boxed{E(X^k)}$, *vorrausgesetzt, die Reihe ist absolut konvergent* ($\sum_x |x|^k P(X = x) < \infty$).
Die ***Varianz*** *von X ist definiert als*

$$\boxed{var(X) = E(X - EX)^2} \text{(Maß für die Streuung)}$$

(Vorraussetzung ist, dass $EX^2 < \infty$, *sonst sagt man, die Varianz existiert nicht)*
Schließlich heißt $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{var(X)}}$ *die* ***Standardabweichung*** *von X.*
Die Varianz ist ein Maß für die Streuung einer ZV um ihren Erwartungswert.

Rechenregeln:

1.

$$\begin{aligned} var(X) = E(X - EX)^2 &= E(X^2 - 2X(EX) + (EX)^2) \\ &= E(X^2) - E(2X(EX)) + E((E(X))^2) \\ &= E(X^2) - 2E(X) \cdot E(X) + (E(X))^2 \\ &= E(X^2) - (E(X))^2 \end{aligned}$$

also $\boxed{var(X) = E(X^2) - (E(X))^2}$

2. Sei $c \in \mathbb{R}$, dann

$$\begin{aligned} var(X + c) &= E((X + c) - E(X + c))^2 = E(X + c - EX - c)^2 \\ &= E(X - EX)^2 = var(X) \Rightarrow \boxed{var(X + c) = var(X)} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} var(cX) &= E(c^2X^2) - (E(cX))^2 \\ &= c^2(E(X^2)) - c^2(EX)^2 \\ &= c^2(E(X^2) - (EX)^2) = c^2 var(X) \Rightarrow \boxed{var(cX) = c^2 var(X)} \end{aligned}$$

damit klar:

$$\sigma(X + c) = \sigma(x) \text{ und } \sigma(cX) = |c| \cdot \sigma(X).$$

Tabelle mit Erwartungswerten und Varianzen der bisher genannten Verteilungen:

Verteilung	**Parameter**	**EW**	**Var**	**WMF=**$P^X = P(X = k)$
Poisson	λ	λ	λ	$e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$, $k \in \mathbb{N}_0$
binomial	n, p	$n \cdot p$	$np(1-p)$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{k-1}$, für $k = 0, 1, ..., n$
geometrisch	p	$1/p$	$\frac{1-p}{p^2}$	$(1-p)^{n-1} \cdot p$, für $n \in \mathbb{N}$
hypergeom.	M, m, n	$\frac{n \cdot m}{M}$	$\frac{m \cdot n}{M} \cdot \frac{M-m}{M} \cdot \frac{M-n}{M-1}$	$\frac{\binom{m}{k}\binom{M-m}{n-k}}{\binom{M}{n}}$

Tabelle 2: Tabelle mit EW und Var diskreter Verteilungen

5 Stetige Zufallsgrößen

5.1 Allgemeines

Viele Zufallsgrößen können ein Kontinuum von Werten annehmen: Lebensdauer, Messfehler, Proportionen, etc.

Definition 6 *(Dichte, stetig verteilt)*
Eine ZV X heißt ***absolut stetig verteilt*** *(kurz stetig) mit* ***Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion*** f_X *(kurz Dichte), wenn gilt*

$$\boxed{P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Die Funktion $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_X(x) = P(X \leq x)$, *heißt die* ***Verteilungsfunktion*** *zu X.*

Im diskreten Fall ist F_X vom reinen Sprungtyp. Im stetigen Fall ist F_X "glatt". Grob ist f_x die Ableitung von F_X, insbesondere also F_X stetig. Insbesondere gilt $P(X = x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ bei stetigen ZV.

5.2 Einige wichtige stetige Verteilungen

5.2.1 Gleichverteilung

Eine Zufallsvariable ZV heißt **gleichverteilt** auf dem Intervall (a,b), kurz: $\mathcal{L}(X) = unif$, $X \sim unif(a, b)$, wenn X die Dichtefunktion $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a < x < b \\ 0 & \end{cases}$ hat.

Die zugehörifge Verteilungsfunktion ist $F(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy$

Abbildung 1: Gleichverteilung (Verteilungsfunktion, Dichtefunktion)

5.2.2 Exponentialverteilung

Die **Exponentialverteilung** mit Parameter $\lambda(> 0)$ wird durch die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , \ x \geq 0 \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases} \Big\}\text{Stammfkt:} 1 - e^{-\lambda x}$$

beschrieben; die zugehörige Verteilungsfunktion ist

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \ x \geq 0 \\ 0 & , \ x < 0 \end{cases}$$

Diese Verteilung taucht häufig im Zusammenhang mit Wartezeiten und Lebensdauern auf. In Beispielen sieht man, daß dann das Alter keine Rolle spielt, diese Tatsache nennt man auch die *Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung.*

5.2.3 Normalverteilung

Die wichtigste stetige Verteilung ist die **Normalverteilung** mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$, kurz: $N(\mu, \sigma^2)$, mit der Dichtefunktion:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2), \quad -\infty < x < \infty.$$

Dies ist die Gaußsche Glockenkurve mit ihren Wendepunkten in $\mu \pm \sigma$ Taucht oft

Abbildung 2: Normalverteilung (Dichtefunktion)

im Zusammenhang mit Messfehlern auf (Zentraler Grenzwertsatz)
!Man findet keine Stammfunktion, deshalb gibt es **Tabellen**!

Für die zugehörige Verteilungsfunktion gibt es keine einfache Formel. Für die Werte $\mu = 0,\ \sigma^2 = 1$ (Man nennt N(0,1) auch **Standardnormalverteilung**) sind die Werte der Verteilungsfunktion

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2y^2}\, dy$$

vertafelt (Tabelle), beispielsweise gilt $\Phi(1,645) = 0.95$.
Tabelle mit den behandelten stetigen Verteilungen

Verteilung	kurz	Vert.funktion	Dichte
Gleich	$unif(a,b)$	$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dy$	$f_X(x) = \frac{1}{b-a}$
Exponential	$exp(\lambda)$	$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$, 0 sonst.	$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$, 0 sonst. Stammfkt: $-e^{-\lambda x}$
Normal	$N(\mu, \sigma^2)$	Es gibt keine Funktion, für $N(0,1)$ sind Werte vertafelt. $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2y^2}\, dy$	$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2)$, $-\infty < x < \infty$

Tabelle 3: Tabelle mit Verteilungsfunktionen und Dichten der stetigen Verteilungen

Lemma 5.2
Für alle $\beta \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0$ gilt $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \alpha X + \beta \sim N(\alpha\mu + \beta,\ \alpha^2\sigma^2)$

5.3 Erwartungswerte und Momente

Definition 7 *(Erwartungswert stetiger ZV)*
*Ist X eine stetige Zufallsgröße mit Dichte f, so wird der **Erwartungswert** EX von X definiert durch*

$$\boxed{EX = \int x\, f(x)\, dx},$$

vorrausgesetzt, es gilt $\int |x| f(x)\, dx < \infty$ sont sagt man, dass der Erwartungswert nicht existiert.

Satz 7

$$\boxed{E\, g(x) = \int g(x)\, f(x)\, dx}$$

Satz 8 *(Linearität und Monotonie)*
Unter der Vorraussetzung, dass die beteligten Erwartungswerte existieren, gilt

1. $E(X+Y) = EX + EY,\ E(cX) = c\, EX \quad c \in \mathbb{R}$ *(Linearität)*
2. $X \leq Y \Rightarrow EX \leq EY$ *(Monotonie)*

Definition 8 *(Momente stetiger ZV)*
*Das **i-te Moment** einer (stetigen) ZV X ist mit $E(X^k)$, die **Varianz** mit $var(X) = E(X - EX)^2$ und die **Standardabweichung** mit $\sigma(X) = \sqrt{var(X)}$ gegeben.*
Rechenregeln sind (für $c \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned} var(X) &= EX^2 - (EX)^2 \\ var(cX) &= c^2\, var(X) \\ var(X+c) &= var(X) \end{aligned}$$

Merke:
zur Standardnormalverteilung $N(0,1)$ gehören der Erwartungswert 0 und die Varianz 1.
im allgemeinen Fall $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ gilt $EX = \mu$ und $var(X) = \sigma^2$

6 Mehrdimensionale Zufallsgrößen und Unabhängigkeit

Hat man mehrere, von dem Ergebnis ω eines Zufallsexperimentes abhängige Größen $X_1(\omega), ..., X_n(\omega) \in \mathbb{R}$, so kann man diese zu einem stochastischen Vektor X zusammenfassen: $\omega \mapsto (X_1(\omega), ..., X_n(\omega))$.

Definition 9 *(gemeinsame Verteilungsfunktion von ZVektoren)*
*Die **gemeinsame Verteilungsfunktion** $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweier ZV X und Y, oder auch: die Verteilungsfunktion des Zufallsvektors (X, Y), wird definiert durch*

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x \text{ und } Y \leq y) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x \wedge Y(\omega) < y\}).$$

Definition 10 *(Unabhängigkeit von Zufallsvektoren)*
*Es seien X, Y ZV mit gemeinsamer Verteilungsfunktion $F_{X,Y}$. Weiter sei F_X die Verteilungsfunktion zu X und F_Y die Verteilungsfunktion zu Y. Dann heißen X und Y **stochastisch unabhängig**, wenn gilt:*

$$\boxed{F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

speziell bei diskreten stetigen ZV setzt man:

Definition 11 *(diskreter, stetiger Zufallsvektor)*

1. *Nehmen X und Y nur endlich viele oder höchstens abzählbar viele Werte an, so nennt man (X, Y) einen **diskreten Zufallsvektor** und $P_{X,Y}(x, y) := P(X = x, Y = y)$ die **gemeinsame Massenfunktion** von X und Y.*
2. *Gibt es eine Funktion $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ mit der Eigenschaft*

$$F_{X,Y}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(s, t)\, ds\, dt \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

   *so nennt man (X, Y) einen **absolut stetig verteilten Zufallsvektor** und $f_{X,Y}$ eine **gemeinsame Dichtefunktion** von X und Y.*

Satz 9 *()*
Es seien X und Y Zufallsvektoren und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann gilt

1. *Ist (X, Y) ein diskreter Zufallsvektor mit Massenfunktion $P_{X,Y}$, so gilt*

$$\boxed{E\, g(x, y) = \sum_X \sum_Y g(x, y)\, P_{X,Y}(x, y).}$$

2. *Ist (X, Y) ein stetiger Zufallsvektor mit Dichtefunktion $F_{X,Y}$, so gilt*

$$\boxed{E\, g(x, y) = \int \int g(x, y)\, f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy.}$$

   Interpretation:
   Wahrscheinlichkeiten als Volumina unter der durch die Dichte definierte Oberfläche.

Satz 10 *(Zusammenhang zur Unabhängigkeit:)*

1. *Ist X, Y **diskret** mit Massenfunktion $P_{X,Y}$, so sind X und Y genau dann unabhängig, wenn*

$$\boxed{p_{X,Y}(x,y) = p_X(x) \cdot p_Y(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}}$$

gilt (konkret: $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$).
Hierbei sind $p_X(x) = P(X = x) = \sum_Y P(X = x, Y = y) = \sum_Y p_{X,Y}(x,y)$ und $p_Y(y) = \sum_X p_{X,Y}(x,y)$ die Massenfunktionen zu X und Y.

2. *Ist X, Y **stetig** mit Dichtefunktion f_X und f_Y, so sind sie genau dann unabhängig, wenn $f_{X,Y}$ mit $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ eine Dichtefunktione zum Zufallsvektor (X, Y) ist.*

Satz 11 *(Multiplikationsregel für Erwartungewerte)*
Für unabhängige ZV X und Y gilt $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$ (vorrausgesetzt, die Erwartungswerte existieren)

Definition 12 *(CoVarianz)*
*Die **Kovarianz** $cov(X,Y)$ zweier ZV X und Y wird definiert durch*

$$\boxed{cov(X,Y) = E(X - EX) \cdot (Y - EY))}.$$

*als **Korrelationskoeffizient** $\varphi(X,Y)$ berechnet man $\varphi(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$ (vorrausgesetzt, die ZV haben eine endliche, von 0 verschiedene Varianz).*

Es gilt

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= E(XY - (EX)Y - X(EY) + (EX)(EY)) \\ &= E(XY) - (EX)(EY) - (EX)(EY) + (EX)(EY) \\ &= E(XY) - (EX)(EY) \end{aligned}$$

Sind X, Y unabhängig gilt $cov(X,Y) = 0$ und man sagt, X,Y sind unkorreliert. Die Umkehrung gilt nicht.
cov und φ können als Maß eier linearen Abhängigkeit angesehen werden.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|E(X - EX)(y - EY)| \leq \sqrt{(E(X - EX)^2)(E(Y - EY)^2)}$$

$$|cov(X,Y)| \leq \sqrt{var(X) \cdot var(Y)} = \sigma(X)\sigma(Y)$$

Insbesondere nimmt der Korrelationskoeffizient Werte im Intervall $[-1, 1]$ an.
Zwei Zufallsvariablen X und Y sind unabhängig, wenn sich die gemeinsame (Massen-)Verteilungsfunktion also Produkt der marginalen (Massen-)Verteilungsfunktionen schreiben lassen.
Bei der Dichtefunktion ist zu beachten, dass man die marginalen Dichtefunktioen durch "ausintegrieren" der anderen Komponente erhalten kann:

$$f_X(x) = \int_0^\infty F_{X,Y}(x,y)\, dy = \int_0^\infty e^{-x-y} = e^{-x}$$

Damit lassen sich W'keiten ausrechnen, die sich auf beide ZV beziehen, zum Beispiel:

$$P(X \leq 2Y) = \iint\limits_{\{(x,y):x \leq 2y,\, x,y \geq 0\}} \int f_{X,Y}(x,y)\, dydx = \int 0^\infty \int_{x/2}^\infty e^{-x-y}\, dydx = 2/3$$

Satz 12 *(Gleichheit von Bienaymé)*
Sind $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvektoren, mit endlicher Varianz, so gilt $var(X_1) + ... + var(X_n)$

Ist die gemeinsame Verteilung zweier ZV X und Y bekannt, so lässt sich (im Prinzip) die Verteilung von $Z := g(X, Y)$ unter $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben, bestimmen. Besonders wichtig, $Z = X + Y$, also $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x = \binom{x_1}{x_2} \to x_1 + x_2$.

6.1 Faltung von P_X und P_Y

Satz 13

1. *Sind X, Y unabhängige diskrete ZV mit Massenfunktionen p_X, p_Y, so ist $X + Y$ wieder eine diskrete ZV mit Massenfunktion*

$$\begin{aligned} P_{X+Y}(z) &= \sum_x p_X(x) p_Y(z-x) \\ &= \sum_y p_X(z-y) p_Y(y) \end{aligned}$$

   Terminologie: Man nennt P_{X+Y} die ***Faltung*** *von P_X und P_Y*

2. *Sind X, Y unabhängige stetige ZV mit Dichtefunktionen f_x, f_y, so ist auch $X + Y$ eine stetige ZV, und die Dichtefunktion lautet*

$$f_{X+Y}(z) = \int f_X(x) f_Y(z-x)\, dx = \int f_X(z-y) f_Y(y)\, dy$$

   Terminologie: Man nennt f_{X+Y} die ***Faltung*** *von f_X und f_Y.*

6.2 Transformationssatz für W'-Dichten

Satz 14 *(Transformationssatz für W'-Dichten)*
Es seien U und V offene Teilmengen von $\mathbb{R}^d$ und $\Psi : U \to V$ eine bijektive, stetige diffbare Abbildung mit $det((\Psi'(x)) \neq 0$ für alle $x \in U$.
Ist dann X ein Zufallsvektor mit Dichte f_X und $P(X \in U) = 1$, so hat $Y := \Psi(x)$ die Dichte

$$f_Y(y) = |det(\Psi^{-1})'(y)|\, f_X(\Psi^{-1}(y)), \quad y \in V.$$

7 Erzeugende Funktionen

In diesem Kapitel geht es um **Transformationsmethoden**, die in vielen Bereichen der Mathematik von großer Bedeutung sind und eine starke Verbindung zur Analysis herstellen.

7.1 w'erzeugende Funktion

Die w'erzeugende Funktion im allgemeinen ist definiert durch

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} f_X(k) s^k = Es^X$$

siehe hierzu Übung11
siehe Skript von Frau Prof. Bäuerle S.29 ff.

7.2 momenterzeugende Funktion

Die momenterzeugende Funktion zu einer Zufallsvariablen is definiert als:

$$\varphi_X(t) = Ee^{tX} = \int_0^{\infty} e^{tx} \cdot f_X(x) dx$$