

Das Bellsche Theorem

Jan Hinzmann
Universität Hannover

jan.hinzmann<at>stud.uni-hannover.de

28. Juli 2005

Zusammenfassung

Dieses Referat befasst sich mit dem *Bellschen Theorem*, welches auch als *Bellsche Ungleichung* bekannt ist. Es wurde 1965 von dem irischen Physiker John Stewart Bell aufgestellt, als er versuchte, eine Theorie von „versteckten lokalen Variablen“ zu beweisen. Die entstehende Ungleichung widerlegt ironischerweise die Existenz von eben diesen Variablen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Die Person Bell	2
3	Die Unvollständigkeit der Quantentheorie	2
3.1	Das EPR-Experiment	2
3.2	Das EPR-Experiment als Paradoxon	4
3.3	Theorie der verborgenen lokalen Variablen	4
4	Das Bellsche Theorem	6
4.1	Ein Zufallsexperiment	6
4.2	EPR-Versuchsanordnung	8
4.3	Der Widerspruch zur Quantentheorie	9
5	Zusammenfassung	11
5.1	Konsequenzen	11
5.2	Fazit	11

1 Einleitung

In der Ausarbeitung zum Referat *Das Bellsche Theorem* wird zunächst kurz auf den Menschen Bell eingegangen. Im Anschluss wird das sogenannte *EPR-Experiment* vorgestellt. Hierbei handelt es sich um ein, von den Physikern Einstein, Podolski und Rosen entwickeltes Gedankenexperiment, welches gegen die Regeln des klassischen Realismus verstößt. Aufbauend auf diesem EPR-Experiment wird die Unvollständigkeit der Quantentheorie erläutert und dann das *Bellsche Theorem* erklärt.

2 Die Person Bell

Der Ire John Stewart Bell wurde am 28. Juni 1928 in Belfast geboren und wuchs in ärmlichen Verhältnissen auf. Sein Physikstudium am Belfaster Queen's College konnte er sich durch Nebenjobs und Stipendien finanzieren. Er schloß 1948 sein Bachelorstudium in Experimentalphysik im Alter von 20 Jahren ab. Ein Jahr später erhielt er seinen Master in mathematischer Physik und mit 28 Jahren (1956) erwarb er seinen Dokortitel in Harwell (Oxfordshire), wo er im Bereich der Atomenergieforschung arbeitete.

Nach seiner Promotion war er mit der theoretischen Elementarteilchenphysik in Birmingham und am CERN beschäftigt und sein Interessengebiet lag insbesondere im Bereich der Quantenphysik. 1965 entdeckte er die nach ihm benannt Bell'sche Ungleichung, beim Versuch die Theorie von „versteckten lokalen Variablen“ zu beweisen — ironischerweise widerlegt die Ungleichung eben diese Theorie.

John Stewart Bell starb 1990 im Alter von 62 Jahren, kurz nach seiner Nominierung für den Nobelpreis, an einer Gehirnblutung in seiner Geburtsstadt Belfast. (Quelle: [4, Wikipedia])

3 Die Unvollständigkeit der Quantentheorie

In diesem Abschnitt wird das von Einstein, Podolski und Rosen (kurz: [5, EPR]) durchgeführte Gedankenexperiment vorgestellt, welches zu dem Schluss kommt, dass die Quantentheorie unvollständig sein muss.

3.1 Das EPR-Experiment

Das von EPR entwickelte Gedankenexperiment zeigt einen Effekt in der Quantentheorie auf, der mit den Regeln des klassischen Realismus nicht vereinbar ist. Für das EPR-Experiment gibt es mehrere experimentelle Anordnungen, die ein charakteristisches Verhalten für diesen Versuch zeigen.

Grundsätzlich weist ein solches EPR-artiges Experiment stets zwei Charakteristika auf:

- Es wird ein System aus zwei Teilchen betrachtet, die anfänglich direkt miteinander wechselwirken und sich daraufhin weit voneinander entfernen. Ein solches System wird durch *einen* quantenmechanischen Zustand

beschrieben, das heißt die beiden Teilchen befinden sich in einem verschränkten Zustand.

- An den räumlich getrennten Teilchen werden zwei komplementäre Messgrößen betrachtet, deren gleichzeitige, exakte Bestimmung nach Heisenbergs Unbestimmtheitsrelation unmöglich ist.

EPR wollten mit einem solchen Experiment die Unvollständigkeit der Quantentheorie im Bezug auf die physikalische Wirklichkeit zeigen. Hierzu betrachteten sie die komplementären Eigenschaften Ort und Impuls der verschränkten Teilchen.

EPR argumentierten nun weiter, dass die Quantentheorie unvollständig ist, da

- in einer vollständigen Theorie jedes *Element der physikalischen Realität* eine Entsprechung in der Theorie haben muss und
- eine Größe, die mit W'keit 1 vorhersagbar ist, ohne dass das System an dem sie gemessen wird gestört wird, ein Element der physikalischen Realität ist.

Da in der Quantentheorie aber wegen der Heisenbergschen Unschärferelation nur eine Größe für jedes einzelne Teilchen vorhersagbar ist, muss die Quantentheorie unvollständig sein.

Heute wird oft eine Variante des EPR-Experimentes betrachtet, die der Physiker David Bohm entwickelt hat. Hierbei werden verschränkte Teilchen betrachtet, die durch den Zerfall eines Teilchens ohne Spin in zwei Teilchen mit komplementärem Spin ($\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$) entstehen. Der Gesamtspin beträgt dann wieder null. Diese Art des EPR-Experimentes ist mittlerweile auch im Laborversuch durchgeführt worden [5].

Da die physikalische Größe, die Bohm als *Spin* bezeichnete mit dem Begriff der *Polarisation* der Photonen im folgenden Experiment praktisch identisch ist (Quelle: [2, Alastair Rae S.29]), wird im Folgenden der Versuchsaufbau von Rae betrachtet (Abbildung 1).

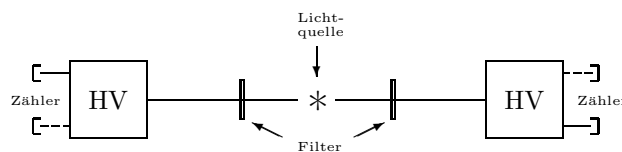


Abbildung 1: Die mit „HV“ gekennzeichneten Elemente sind Messgeräte, mit deren Hilfe man die Polarisierung der einfallenden Photonen in horizontaler (H) bzw. vertikaler (V) Richtung messen kann.

Durch einen bestimmten Prozess können Atome dazu angeregt werden, zwei verschränkte Photonen zu emittieren, die sich in der Folge in entgegengesetzter Richtung ausbreiten. Da sie verschiedene Wellenlängen haben, können sie durch entsprechende Filter identifiziert werden und es stellt sich heraus, dass wann

immer in der linken Apparatur ein Photon mit horizontaler Polarisation registriert wird, auf der rechten Seite ein Photon mit vertikaler Polarisation eintrifft und umgekehrt.

Ausgehend von diesem EPR-Experiment kann man nun ein Gedankenexperiment durchführen, in dem man zu dem Schluss kommt, dass es nun doch möglich sein müsste, zwei komplementäre Eigenschaften zu bestimmen. Dies soll im nächsten Abschnitt besprochen werden.

3.2 Das EPR-Experiment als Paradoxon

Beim EPR-Experiment kann man durch die Bestimmung einer Eigenschaft des einen Teilchens den Wert der gleichen Eigenschaft des anderen (verschränkten) Teilchens exakt vorhersagen. Die folgende Argumentation verdeutlicht das dadurch entstehende Paradoxon:

- Bestimmt man in einem EPR-Experiment den Ort eines Teilchens, kann man mit W keit 1, also sehr genau, den Ort des anderen Teilchens vorhersagen.
- Da an dem zweiten Teilchen keine Messung vorgenommen worden ist, kann an diesem der Impuls gemessen werden.
- Wegen der Verschränktheit der Teilchen kennt man nun von beiden Teilchen Ort und Impuls.
- Dies widerspricht aber der Heisenbergschen Unschärferelation.

In der Kopenhagener Deutung wird das Paradoxon dann aufgelöst, da die indirekte Bestimmung über die Messung am zweiten Teilchen eben gar keine Messung der Eigenschaft des ersten Teilchens ist (Quelle: [5]). Die Wellengleichung bricht bei der Messung am ersten Teilchen bereits zusammen und die Bestimmung am zweiten Teilchen bezieht sich auf eine andere Realität des Teilchens. So ist es nicht möglich, beide komplementären Eigenschaften eines Teilchens gleichzeitig zu kennen.

Durch diese Erkenntnissen kam man zu der Ansicht, dass die Quantentheorie unvollständig ist, und es wurden Versuche unternommen, diese zu vervollständigen. Ein Konzept hierzu, welches im Weiteren besprochen wird und schließlich zum Bellschen Theorem führt, ist das Konzept der *verborgenen lokalen Variablen*.

3.3 Theorie der verborgenen lokalen Variablen

Um die Messergebnisse der mikroskopischen Welt physikalisch zu beschreiben, kann man unter Einbeziehung der Eigenschaften

- Lokalität,
- Realismus und
- gemeinsame Messbarkeit

eine Beziehung (genauer eine Ungleichung) aufstellen. Diese Ungleichung wird allerdings von verschiedenen Experimenten verletzt. Hieraus lässt sich schließen, dass Realismus und Lokalität nicht vereinbar sind.

Will man nun die Lokalität erhalten, so kann man sich das Konzept der „verborgenen lokalen Variablen“ vorstellen, welches sich z.B. als Listen interpretieren lässt, die jedes Teilchen mit sich führt und in denen steht, welchen Spin bzw. welche Polarisation es hat, wenn es in einer bestimmten Richtung gemessen wird. Dabei sind die beiden Listen der verschränkten Teilchen zueinander komplementär. Wird also bei dem einen Teilchen beispielsweise eine Polarisation von 45° gemessen, so enthält der entsprechende Eintrag in der Liste des anderen Teilchens -45° . Nun kann man aber in unendlich vielen verschiedenen Richtungen messen und als Folge müssten die Listen unendlich groß werden.

Bell versuchte nun, eine solche Theorie zu beweisen, was im nächsten Abschnitt besprochen werden soll.

4 Das Bellsche Theorem

In diesem Abschnitt wird das Bellsche Theorem vorgestellt, welches auch unter dem Begriff „*Die Bellsche Ungleichung*“ bekannt ist. Die Ungleichung entstand, wie bereits erwähnt, bei dem Versuch, das Konzept der verborgenen lokalen Variablen zu beweisen und sie zeigt, dass die Annahme von solchen Variablen falsch ist. Hierzu wird zunächst ein Zufallsexperiment durchgeführt, welches den Kern der Bellschen Ungleichung verdeutlicht. Anschließend wird der Zusammenhang zwischen dem Zufallsexperiment und der Quantentheorie hergestellt und im Anschluss der Widerspruch zur Quantentheorie gezeigt.

4.1 Ein Zufallsexperiment

Um das Bellsche Theorem zu verstehen, ist das folgende Zufallsexperiment nützlich. Hierzu wird beispielsweise eine faire Münze geworfen und es wird in einer Tabelle das Zeichen „+“ notiert, wenn „Zahl“ erscheint und „-“, falls „Kopf“ erscheint. Die Tabelle habe drei Spalten, welche die Überschriften h , ϕ und θ tragen und wird dann zeilenweise gefüllt. Die Münze wird solange geworfen, bis man ungefähr 10 bis 20 Zeilen gefüllt hat. Ein mögliches Ergebnis dieses Zufallsexperiments wäre also beispielsweise in Tabelle 1 gegeben.

h	ϕ	θ
+	-	+
-	-	-
+	+	-
+	-	-
-	+	+
-	-	+
+	+	+
-	+	-
-	-	+
+	-	+
-	+	+
+	-	-

Tabelle 1: Möglicher Ausgang des Zufallsexperiments

Nachdem die Tabelle gefüllt wurde, werden nun diejenigen Zeilen gezählt, bei denen in der h - und in der ϕ -Spalte ein „+“ eingetragen ist. Als Notation soll hier die Gleichung $n(h = +, \phi = +)$ dienen. Für das Ergebnis des Zufallsexperiments aus Tabelle 1 ergibt sich also die folgende Gleichung

$$n(h = +, \phi = +) = 2. \quad (1)$$

Anschließend werden diejenigen Zeilen gezählt, in denen in der ϕ -Spalte ein „-“ steht und in der θ -Spalte ein „+“. In der obigen Notation ergibt das die Gleichung

$$n(\phi = -, \theta = +) = 4. \quad (2)$$

Schließlich werden noch diejenigen Zeilen gezählt, in denen in der h -Spalte und in der θ -Spalte ein „+“ eingetragen ist, welches die letzte Gleichung ergibt.

$$n(h = +, \theta = +) = 3 \quad (3)$$

Addiert man nun das Ergebnis aus Gleichung 1 zu dem aus Gleichung 2 und vergleicht das resultierende Ergebnis mit Gleichung 3, so ergibt sich der folgende Zusammenhang

$$2 + 4 \geq 3 \quad \checkmark$$

bzw. in der bekannten Notation

$$n(h = +, \phi = +) + n(\phi = -, \theta = +) \geq n(h = +, \theta = +). \quad (4)$$

Interessanterweise gilt diese Gleichung für alle Ausgänge des Zufallsexperimentes.

Dies wird unmittelbar einsichtig, wenn man Gleichung 4 in die grafische Notation eines Kreisdiagrammes (Abb. 2) überträgt.

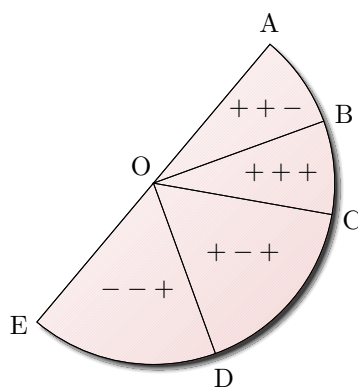
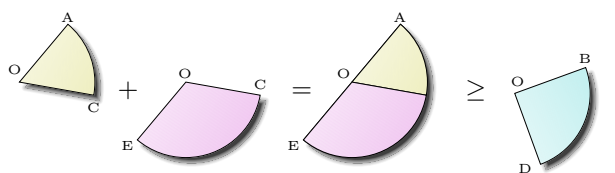


Abbildung 2: Kreisdiagramm zum grafischen Beweis, dass Gleichung 4 immer gelten muss.

Gleichung 4 sagt aus, dass das Kreissegment AOC zusammen mit dem Segment COE größer ist als das Segment BOD, also



Vergleicht man das Kreissegment AOE mit dem BOD-Segment, leuchtet dies unmittelbar ein.

Der folgende Abschnitt stellt nun den Zusammenhang zwischen dem Zufallsexperiment und der Quantentheorie her. Anschließend wird die Inkonsistenz zwischen dem Bellschen Theorem und der Quantenphysik dargelegt.

4.2 EPR-Versuchsanordnung

In diesem Abschnitt wird der Versuchsaufbau erläutert, der beispielhaft für das durchgeführte EPR-Experiment dient. In Abbildung 3 ist zunächst ein vereinfachter Versuchsaufbau, ähnlich zu dem in Abbildung 1 gezeigt, mit dem man die horizontale bzw. vertikale Polarisation von verschränkten Photonen bestimmen kann.

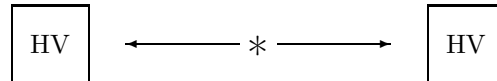


Abbildung 3: Messung der Polarisation von verschränkten Photonen in horizontaler oder vertikaler Richtung.

Die Polarsation wird auf beiden Seiten gemessen und wann immer ein Teilchen mit horizontaler Polarisation gemessen wird, wird auf der anderen Seite ein Teilchen mit vertikaler Polarisation registriert.

Da nun in unterschiedlichen Richtungen gemessen werden kann, werden die Apparaturen zur Messung der Polarisation im Folgenden nicht mehr starr in der Wagerechten angenommen, sodass man nur in der Horizontalen bzw. der Vertikalen messen kann, sondern sie können um einem Winkel ϕ bzw. θ verdreht werden. Dies repräsentiert die verschiedenen Richtungen, an denen die Polarisation gemessen werden kann.

Im Folgenden werden nun drei verschiedene Experimente durchgeführt, bei denen jeweils ein Teilchen mit Spin 0 in zwei Teilchen mit komplementärem Spin $\pm \frac{1}{2}$ zerfällt. Die Richtung des Spins wird dann an beiden Teilchen gemessen, wobei die Messung in verschiedenen Richtungen erfolgt. Es wird anschließend bei jedem Durchlauf ein „+“ notiert, falls die gemessene Polarisation parallel zur Messrichtung ist und ein „-“, falls sie dazu senkrecht ist. Hier zeigen sich schon Parallelen zum Zufallsexperiment aus Abschnitt 4.1.

In einem ersten Experiment (Abb. 4) wird nun die rechte Apparatur um einen Winkel ϕ verdreht.

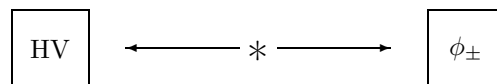


Abbildung 4: Messung der Polarisation von verschränkten Photonen in horizontaler bzw. vertikaler Richtung auf der linken Seite und in vertikaler bzw. horizontaler Richtung verdreht um den Winkel ϕ auf der rechten Seite.

Das Experiment wird nun einer großen Anzahl von Wiederholungen unterzogen und es ergibt sich eine Anzahl von registrierten Photonen zu:

$$n(v, \phi_+) = n(h = +, \phi = +) \quad (5)$$

In einem zweiten Experiment wird die rechte Aparatur nun um einen Winkel θ verdreht (Abb. 5).

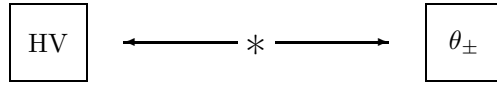


Abbildung 5: Messung der Polarisation von verschränkten Photonen in horizontaler bzw. vertikaler Richtung auf der linken Seite und in vertikaler bzw. horizontaler Richtung verdreht um den Winkel θ auf der rechten Seite.

Analog zu dem ersten Experiment ergibt sich bei einer großen Anzahl von Wiederholungen die Anzahl von registrierten Photonen zu:

$$n(v, \theta_+) = n(h = +, \theta = +) \quad (6)$$

In einem dritten Experiment werden nun schließlich beide Apparaturen um die Winkel ϕ bzw. θ verdreht, wie in Abbildung 6 gezeigt ist.

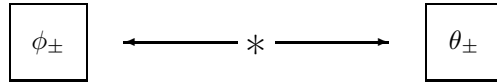


Abbildung 6: Messung der Polarisation von verschränkten Photonen in horizontaler bzw. vertikaler Richtung auf der linken Seite verdreht um den Winkel ϕ und in vertikaler bzw. horizontaler Richtung verdreht um den Winkel θ auf der rechten Seite.

Hier ergibt sich analog zu den beiden anderen Experimenten die Anzahl der registrierten Photonen bei einer großen Anzahl von Wiederholungen zu:

$$n(\phi_+, \theta_+) = n(\phi = -, \theta = +) \quad (7)$$

Aus den linken Seiten der Relationen 5-7 folgt in Analogie zu Abschnitt 4.1 nun unmittelbar die **Bellsche Ungleichung**, da die rechten Seiten ja genau die Terme aus dem Zufallsexperiment sind:

$$\boxed{n(v, \phi_+) + n(\phi_+, \theta_+) \geq n(v, \theta_+)}$$

„Die Bellsche Ungleichung muss von jeder, auf verborgenen Variablen beruhenden Theorie erfüllt werden.“ [2, Rae, S.37ff.]

Im folgenden Abschnitt wird nun gezeigt, wie die Quantentheorie im Widerspruch zur Bellschen Ungleichung steht.

4.3 Der Widerspruch zur Quantentheorie

In diesem Abschnitt soll der Widerspruch der Quantentheorie zur Bellschen Ungleichung aufgezeigt werden. Hierzu werden die aus Abschnitt 4.2 bekannten Terme $n(v, \phi_+)$, $n(v, \theta_+)$ und $n(\phi_+, \theta_+)$ in die Terme der Quantentheorie

übersetzt:

$$\begin{aligned}n(v, \phi_+) &= \frac{1}{2}N \cos^2 \phi \\n(v, \theta_+) &= \frac{1}{2}N \cos^2 \theta \\n(\phi_+, \theta_+) &= \frac{1}{2}N \sin^2(\theta - \phi)\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen wird in Analogie zu den Abschnitten 4.1 und 4.2 die Bellsche Ungleichung aufgestellt, welche also in

$$\cos^2 \phi + \sin^2(\theta - \phi) \geq \cos^2 \theta \quad (8)$$

ihre Entsprechung findet (Bem.: Die gesamte Gleichung wurde mit $\frac{2}{N}$ multipliziert).

Diese Gleichung muss also für alle ϕ, θ gelten, wenn das Bellsche Theorem konsistent mit der Quantentheorie ist. Findet man allerdings Werte für ϕ und θ , bei denen diese Ungleichung zu einem Widerspruch führt, so kann eine Theorie von versteckten lokalen Variablen nicht gelten.

Bei einem Verhältnis von $\phi = 3\theta$ ergibt sich die linke Seite von Gleichung 8 zu $\cos^2 3\theta + \sin^2 2\theta$ und die Gesamtgleichung kann zu der Bedingung

$$\cos^2 3\theta + \sin^2 2\theta - \cos^2 \theta \geq 0$$

umgeformt werden. Diese Bedingung ist in Abbildung 7 als Funktion von θ dargestellt.

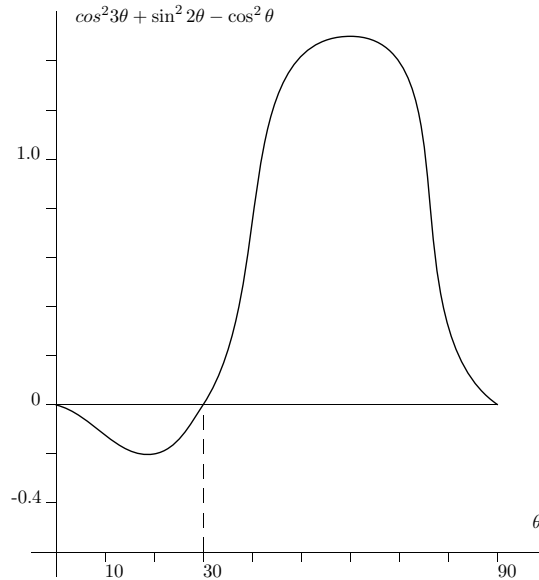


Abbildung 7: Der Graph der Funktion $\cos^2 3\theta + \sin^2 2\theta - \cos^2 \theta$ muss für alle θ positiv sein, wenn die Quantentheorie mit der Bellschen Ungleichung konsistent ist.

Betrachtet man den Graphen der Funktion, fällt auf, dass ab einem Winkel von kleiner 30° die Funktion negativ wird und somit die obige Bedingung verletzt ist.

Aber auch schon die Wahl von $\theta = 20^\circ$ und $\phi = 60^\circ$, ergibt einen Widerspruch, denn dann wird Gleichung 8 zu $0.66 \geq 0.88$ ζ .

In diesem Abschnitt wurde gezeigt, dass das Bellsche Theorem nicht konsistent mit der Quantentheorie ist und es somit keine versteckten lokalen Variablen geben kann. Die Konsequenzen aus dieser Erkenntnis sollen aber im nächsten Abschnitt besprochen werden.

5 Zusammenfassung

5.1 Konsequenzen

Als Konsequenz durch das Bellsche Theorem ergeben sich die folgenden Punkte:

- Die Quantentheorie ist schlichtweg falsch. Allerdings ist sie experimentell bestätigt und es gibt ja Ergebnisse aus Messungen, die durch die Quantentheorie exakt vorhergesagt werden.
- Zweitens kann man die Vorstellung verborgener Variablen aufgeben und argumentieren, dass die Wellenfunktion keine Informationen über die Werte von Messungen an Teilchen enthält. Das entspricht der Kopenhagener Interpretation der Quantenmechanik.
- Man könnte auch das Prinzip der Lokalität aufgeben: Die Verletzung der Ungleichung kann durch eine auf nicht-lokale verborgene Variablen bauende Theorie erklärt werden, nach der Teilchen Informationen über ihre Zustände austauschen. Darauf basiert die Bohm-Interpretation. Eine solche Interpretation wird jedoch als unelegant angesehen, da alle Teilchen des Universums instantan mit allen anderen Teilchen die Informationen austauschen können müssten.

(Quelle: [6])

5.2 Fazit

In diesem Referat wurde zunächst der Physiker John Stewart Bell vorgestellt, der sich sein Physikstudium durch Stipendien und Nebenjobs finanzieren musste. Anschließend wurde das EPR-Experiment vorgestellt und die Unvollständigkeit der Quantentheorie erklärt. Versuche, die Quantentheorie zu vervollständigen, haben eine Theorie von versteckten lokalen Variablen hergebracht, welche allerdings wegen der Bellschen Ungleichung und den Überlegungen zur Messung der Polarisation von verschränkten Photonen in drei verschiedenen Richtungen inkonsistent mit der Quantentheorie sein muss. Also ist eine Theorie von verborgenen lokalen Variablen nicht auf die Quantentheorie anwendbar. Dies konnte anschaulich nachvollzogen werden, wenn es auch berechtigte Kritik an der Vorgehensweise gibt, da die Bellsche Ungleichung alternative, also nicht durchführbare Messungen einbezieht, die wohldefinierte Ergebnisse liefern. Die

unvollständige Bestimmtheit ist aber eine Voraussetzung für die Ungleichung.

In Zukunft könnte man eine Theorie von globalen verborgenen Variablen aufstellen, müsste dann allerdings annehmen, dass die verschränkten Photonen instanten Informationen austauschen, damit die Messergebnisse erklärt werden können. Man muss dann mit Paradigmen der klassischen Physik brechen.

Literatur

- [1] On the problem of hidden variables
aus J. S. Bell, Speakable and unspeakable in quantum mechanics, Cambridge
1992
- [2] Alastair I.M. Rae, Quantumphysics: illusion or reality, Cambridge University
Press 1986, ISBN 0-521-26023-X
- [3] Anton Zeilinger, Einsteins Schleier Die neue Welt der Quantenphysik, Gold-
mann 2005, ISBN 3-442-15302-6
- [4] Wikipedia – John Stewart Bell
http://de.wikipedia.org/wiki/John_Stewart_Bell, 14.07.2005 18:00h CET
- [5] Wikipedia – EPR-Effekt
<http://de.wikipedia.org/wiki/EPR-Effekt>, 14.07.2005 18:00h CET
- [6] Wikipedia – Bellsche Ungleichung
http://de.wikipedia.org/wiki/Bellsche_Ungleichung, 14.07.2005 18:00h CET
- [7] Wikipedia – Heisenbergsche Unschärferelation
http://de.wikipedia.org/wiki/Heisenbergsche_Unschärferelation , 14.07.2005
18:00h CET